ISBN 5-7417-0124-8. Некоторые проблемы фундаментальной и прикладной математики. М., 1999

УДК 517.977.1

Г.Н. Яковенко, Д.Г. Ивашко, Д.В. Козьминых, М.А. Ризен
Московский физико-технический институт

ОБ ИЗОМОРФИЗМЕ АЛГЕБР ЛИ, ПОРОЖДЕННЫХ ПРОЦЕССАМИ ТИПА "ВХОД–ВЫХОД"

Алгебра Ли связана с динамической системой. Две алгебры Ли заданы структурными постоянными. Обсуждается вопрос об изоморфизме алгебр: возможно ли переходом в одной из алгебр к другому базису добиться совпадения структурных постоянных? Для малых размерностей вопрос решается аналитически — исследованием нелинейной системы уравнений для элементов матрицы перехода. Для больших размерностей вопрос исследуется с привлечением вычислительной техники[1].

1. Постановка задачи

Значительная часть реальных динамических процессов является процессами типа "вход–выход": процесс испытывает внешнее воздействие — вход, реакция процесса на вход — выход. Обширная часть таких процессов моделируется системами обыкновенных дифференциальных урав-

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-00018).

ISBN 5-7417-0124-8. Некоторые проблемы фундаментальной и прикладной математики. М., 1999

нений

$$\dot{x} = \varphi(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^n. \tag{1.1}$$

Переменные $u = (u^1, \ldots, u^n)$ соответствуют входу. Вместо u могут быть подставлены достаточно произвольные функции $u^k(t)$ независимой переменной — времени t. Переменные $x = (x^1, \ldots, x^m)$ определяют состояние процесса. Решение $x(t)$ системы (1.1), в правую часть которой подставлены функции $u^k(t)$, — выход, соответствующий входу $u(t)$.

Пара $\{T,\ u(t)\}$ порождает преобразование $P\{T,\ u(t)\}$ пространства $\mathbb{R}^m$: в систему (1.1) подставляется вход $u(t)$; соответствующее решение $x(t)$ переводит каждое начальное состояние $x(0)$ в конечное $x(T)$. Так как множество пар $\{T,\ u(t)\}$ в норме обладает функциональной мощностью, система (1.1) в общем положении порождает множество преобразований $P\{T,\ u(t)\}$, которую нельзя погрузить в конечномерную группу преобразований.

Представителен класс **групповых систем** [1 — 4], для которых совокупность преобразований $P\{T,\ u(t)\}$, несмотря на функциональную мощность множества $\{T,\ u(t)\}$, есть n-параметрическая ($n < \infty$) группа Ли преобразований (локально). К групповым системам принадлежат линейные (в том числе неавтономные), билинейные и некоторые существенно нелинейные системы.

Определение 1.1. *Система*

$$\dot{x}^k = \sum_{l=1}^{n} \varphi_l^k(x) u^l, \qquad k = \overline{1, m}, \qquad u \in U \subset \mathbb{R}^n, \tag{1.2}$$

ISBN 5-7417-0124-8. Некоторые проблемы фундаментальной и прикладной математики. М., 1999

называется **групповой** , *если для функций* $\varphi_l^k(x)$ *выполнены условия*

$$\operatorname{rank}\|\varphi_l^k(x)\| = \min\{m, n\}, \tag{1.3}$$

$$\left\{\sum_{l=1}^{n} c^l \varphi_l^k(x) = 0,\ c^l = \mathrm{const}\right\} \to \{c^l = 0,\ l = \overline{1, n}\}, \tag{1.4}$$

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{n} C_{ij}^k X_k, \quad C_{ij}^k = \mathrm{const} \quad i, j, k = \overline{1, n}, \tag{1.5}$$

где обозначено

$$X_l = \sum_{k=1}^{m} \varphi_l^k(x) \frac{\partial}{\partial x^k}, \qquad l = \overline{1, n}, \tag{1.6}$$

$[X_i, X_j]$ — *коммутатор операторов* (1.6)*:*

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{m} \{X_i \varphi_j^k(x) - X_j \varphi_i^k(x)\} \frac{\partial}{\partial x^k}. \tag{1.7}$$

Термин *групповая система* оправдан тем, что каждой системе (1.2) ставится в соответствие n-параметрическая группа сдвигов вдоль решений

$$x = g(x_0^1, \ldots, x_0^m,\ v^1, \ldots, v^n), \tag{1.8}$$

уравнения которой по операторам (1.6) можно вычислить, например, следующим способом: каждому оператору X_l система уравнений $dx^i/dv^l = \varphi_l^i(x)$, $x(0) = x_0$ ставит в соответствие решение $x = g_j(x_0^1, \ldots, x_0^m,\ v^l)$ — однопараметрическую группу преобразований; n-параметрическая группа (1.8) — суперпозиция этих групп.

ISBN 5-7417-0124-8. Некоторые проблемы фундаментальной
и прикладной математики. М., 1999

Формула (1.5) и определение (1.7) коммутатора влекут следующие свойства для постоянных C_{ij}^k:

$$C_{jl}^k = -C_{lj}^k, \qquad j,\, k,\, l = \overline{1, n}, \tag{1.9}$$

— антисимметричность по нижним индексам;

$$\sum_{s=1}^{n} (C_{js}^k C_{il}^s + C_{is}^k C_{lj}^s + C_{ls}^k C_{ji}^s) = 0, \quad i,\, j,\, k,\, l = \overline{1, n}, \tag{1.10}$$

— тождество Якоби.

Свойства (1.9), (1.10) приводят к понятию алгебры Ли (ограничимся определением вещественной, конечномерной алгебры Ли).

Определение 1.2. Алгеброй Ли *называется n-мерное ($n < \infty$) над полем вещественных чисел векторное пространство, в котором определена билинейная операция*

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{n} C_{ij}^k X_k, \quad C_{ij}^k = \mathrm{const}, \quad i, j, k = \overline{1, n} \tag{1.11}$$

($X_1, \ldots, X_n$ — базисные векторы), причем **структурные постоянные** C_{ij}^k *удовлетворяют свойствам* (1.9), (1.10). *При* $C_{ij}^k = 0,\ i, j, k = \overline{1, n}$, *алгебра Ли называется* **абелевой** .

В работе векторное пространство задается базисом операторов (1.6), а билинейная операция (1.11) — коммутатором (1.7). Набор структурных постоянных $\{C_{ij}^k\}$ является инвариантной характеристикой групповой системы (1.2): диффеоморфизм $x \leftrightarrow y$ переводит групповую систему в групповую с такими же постоянными C_{ij}^k в (1.2). По

ISBN 5-7417-0124-8. Некоторые проблемы фундаментальной и прикладной математики. М., 1999

набору $\{C_{ij}^k\}$ можно изучать многие инвариантные свойства групповых систем: наличие первых интегралов, симметрий, возможность заменой переменных придать системе специальный вид — линейный, блочный и т. д.

В работе [5] обсуждался следующий вопрос: будут ли заданные постоянные C_{ij}^k удовлетворять тождеству Якоби (1.10) при изначально заданном условии антисимметричности (1.9)? Ответ на этот вопрос может быть как положительным, так и отрицательным. Так как с ростом размерности количество условий (1.10) резко возрастает ($\sim n^4$), была разработана вычислительная программа, которая не только проверяет тождество Якоби (1.10), но и рекомендует коррекцию исходного набора $\{C_{ij}^k\}$.

В настоящей работе ставится вопрос о проверке изоморфности двух алгебр Ли. Этот вопрос и вопрос, рассмотренный в [5], сходны тем, что, во-первых, для решения требуется знать только постоянные C_{ij}^k, во-вторых, количество соотношений, требующих проверки, существенно растёт с увеличением размерности, и привлечение вычислительной техники является естественным.

К понятию изоморфизма алгебр Ли приводит неоднозначность представления групповой системы в форме (1.2). Одна и та же система может быть представлена уравнениями (1.2) и уравнениями

$$\dot{x}^k = \sum_{l=1}^{n} \tilde{\varphi}_l^k(x)\tilde{u}^l, \qquad k = \overline{1, m}, \qquad \tilde{u} \in \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n, \tag{1.12}$$

где обозначено

$$\tilde{\varphi}_j^k(x) = \sum_{l=1}^{n} \varphi_l^k(x) a_j^l, \qquad k = \overline{1, m}, \tag{1.13}$$

ISBN 5-7417-0124-8. Некоторые проблемы фундаментальной
и прикладной математики. М., 1999

$$\tilde{u}^j = \sum_{i=1}^{n} b_i^j u^i, \qquad j = \overline{1,n}, \tag{1.14}$$

а для вещественных матриц $\|a_j^l\|$, $\|b_i^j\|$ выполняется

$$a_j^l = \mathrm{const}, \qquad \det \|a_j^l\| \neq 0, \qquad \|b_i^j\| = \|a_j^l\|^{-1}. \tag{1.15}$$

Множество $\tilde{U}$ есть результат поточечного преобразования (1.14) элементов U в $\tilde{U}$.

Замена в (1.2) функций $\varphi_l^k(x)$ на (1.13) эквивалентна переходу в векторном пространстве алгебры Ли от базиса (1.6) к базису

$$\tilde{X}_j = \sum_{k=1}^{m} \tilde{\varphi}_j^k(x) \frac{\partial}{\partial x^k} = \sum_{l=1}^{n} a_j^l X_l, \qquad j = \overline{1,n}. \tag{1.16}$$

Для базисных элементов $\tilde{X}_j$ выполняется аналогичное (1.5) соотношение

$$[\tilde{X}_j, \tilde{X}_l] = \sum_{\gamma=1}^{n} \tilde{C}_{jl}^{\gamma} \tilde{X}_{\gamma}, \qquad j,l = \overline{1,n}. \tag{1.17}$$

Возврат (1.16) в (1.17) к базису X_l приводит с учетом (1.5) к связи структурных постоянных

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_j^{\alpha} a_l^{\beta} C_{\alpha\beta}^{i} = \sum_{\gamma=1}^{n} \tilde{C}_{jl}^{\gamma} a_{\gamma}^{i}, \qquad i,j,l = \overline{1,n}, \tag{1.18}$$

или в разрешенном относительно $\tilde{C}_{jl}^{\gamma}$ виде

$$\tilde{C}_{jl}^{k} = \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{n} a_j^{\alpha} a_l^{\beta} C_{\alpha\beta}^{\gamma} b_{\gamma}^{k}, \qquad k,j,l = \overline{1,n}, \tag{1.19}$$

— использованы соотношения (1.15).

ISBN 5-7417-0124-8. Некоторые проблемы фундаментальной и прикладной математики. М., 1999

Определение 1.3 [6, 7]. *Две n-мерные алгебры Ли со структурными постоянными $C^{\gamma}_{\alpha\beta}$, $\tilde{C}^{k}_{jl}$ соответственно называются* **изоморфными** , *если постоянные $C^{\gamma}_{\alpha\beta}$, $\tilde{C}^{k}_{jl}$ связаны соотношениями* (1.18) *или* (1.19), *а входящие в эти соотношения матрицы $\|a^{l}_{j}\|$, $\|b^{j}_{i}\|$ удовлетворяют условиям* (1.15).

Отношение изоморфизма является отношением эквивалентности и разбивает множество n-мерных алгебр Ли на классы эквивалентности, что приводит к задаче классификации: перечислить классы эквивалентности и указать в каждом классе простейший представитель. Задача классификации решена для алгебр Ли малой размерности [6–9] и в данной работе отдельно не затрагивается. Обсуждается задача проверки двух алгебр Ли на изоморфность. Задача сводится к следующему вопросу: имеет ли система уравнений (1.18) (или (1.19)), в которую подставлены постоянные $C^{\gamma}_{\alpha\beta}$, $\tilde{C}^{k}_{jl}$, вещественное решение a^{l}_{j}, удовлетворяющее условиям (1.15)? Для n-мерной алгебры Ли система (1.18) с учетом (1.9) содержит $n^2(n-1)/2$ в общем случае независимых нелинейных уравнений для n^2 неизвестных a^{l}_{j}. К примеру, при $n = 10$ в системе (1.18) 450 уравнений для 100 неизвестных a^{l}_{j}. В работе полностью изучен случай малых размерностей ($n \leqslant 3$), и для достаточно больших размерностей ($n \sim 20$) с привлечением вычислительной техники проверялись необходимые условия.

2. Необходимые условия изоморфности

Для формулировки необходимых условий потребуется несколько понятий, связанных с конкретной n–мерной алгеброй Ли [7, 8].

Первой производной алгеброй $L^{(1)} = [L, L]$ называется подалгебра алгебры $L = L^{(0)}$ — линейная оболочка элементов $[X, Y]$, X, $Y \in L$. Число $d^{(1)} = \dim L^{(1)}$ называется **первой производной размерностью** . По индукции определяется ***k*-я производная алгебра** $L^{(k)}$ — линейная оболочка элементов $[X, Y]$, X, $Y \in L^{(k-1)}$. Число $d^{(k)} = \dim L^{(k)}$ — ***k***-я производная размерность . Последовательность

$$\begin{gathered} L = L^{(0)} \supset L^{(1)} = [L, L] \supset L^{(2)} = [L^{(1)}, L^{(1)}] \supset \cdots \\ \cdots \supset L^{(k)} = [L^{(k-1)}, L^{(k-1)}] = L^{(k-1)} \end{gathered} \tag{2.1}$$

называется **производным рядом** . Последовательность

$$n = d^{(0)} > d^{(1)} > d^{(2)} > \cdots > d^{(k)} = d^{(k-1)} \tag{2.2}$$

называется **производным рядом размерностей** . Подсчет обоих рядов (2.1), (2.2) обрывается при $d^{(k)} = d^{(k-1)}$.

Аналогично строятся **центральный ряд** (нижний центральный ряд)

$$\begin{gathered} L = L_{(1)} \supset L_{(2)} = [L, L] \supset L_{(3)} = [L_{(2)}, L] \supset \cdots \\ \cdots \supset L_{(l)} = [L_{(l-1)}, L] = L_{(l-1)} \end{gathered} \tag{2.3}$$

и **центральный ряд размерностей**

$$n = d_{(1)} > d_{(2)} > d_{(3)} > \cdots > d_{(l)} = d_{(l-1)}. \tag{2.4}$$

Вычисление обоих рядов (2.3), (2.4) прекращается при $d_{(l)} = d_{(l-1)}$. (В разных источниках несколько отличается терминология и нумерация подалгебр $L^{(k)}$ и $L_{(l)}$, в настоящей работе используется нумерация [7]).

ISBN 5-7417-0124-8. Некоторые проблемы фундаментальной и прикладной математики. М., 1999

Предложение 2.1 [7, 8]. *У двух изоморфных алгебр Ли совпадают производные ряды размерностей* (2.2) *и центральные ряды размерностей* (2.4).

Следствие. *Пусть у двух n-мерных алгебр Ли не совпадают производные ряды размерностей* (2.2) *или не совпадают центральные ряды размерностей* (2.4). *Тогда алгебры не изоморфны.*

Следствие является "отсеивателем" неизоморфных пар алгебр Ли, но, как показывают примеры, совпадение рядов (2.2), (2.4) не гарантирует изоморфности.

3. Изоморфизм одно-двухмерных алгебр Ли

Так как базис одномерной алгебры Ли содержит один элемент X_1, то условие (1.11) с учетом (1.9) выполняется только при $C_{ij}^k = 0$, т.е. каждая одномерная алгебра Ли абелева и все они изоморфны: в (1.18)

$$C_{ij}^k = 0, \;\; \tilde{C}_{ij}^k = 0, \;\; \|a_j^l\| = a = \mathrm{const} \neq 0.$$

В случае двухмерной алгебры Ли для базисных операторов X_1, X_2 выполняется (здесь и далее приводятся только те постоянные C_{ij}^k, для которых выполняется $C_{ij}^k \neq 0$, $i < j$):

$$[X_1, X_2] = AX_1 + BX_2, \;\; C_{12}^1 = A, \;\; C_{12}^2 = B. \tag{3.1}$$

Возможны два варианта.

а) $A = 0$, $B = 0$ — абелева алгебра. Как следует из (1.19), любая алгебра, изоморфная абелевой, также абелева, т.е для любой размерности существует класс эквивалентности, в котором и только в котором находятся абелевы алгебры Ли.

ISBN 5-7417-0124-8. Некоторые проблемы фундаментальной
и прикладной математики. М., 1999

б) $A^2 + B^2 \neq 0$. Покажем, что любая такая алгебра изоморфна алгебре, для базисных операторов $\tilde{X}_1$, $\tilde{X}_2$ которой выполняется

$$[\tilde{X}_1, \tilde{X}_2] = \tilde{X}_1, \quad \tilde{C}^1_{12} = 1. \tag{3.2}$$

Переход $\tilde{X}_j = \sum\limits_{k=1}^{n} a^l_j X_l$ (см. (1.16)) в (3.2) к базису X_1, X_2 приводит к уравнению

$$[a^1_1 X_1 + a^2_1 X_2,\, a^1_2 X_1 + a^2_2 X_2] = a^1_1 X_1 + a^2_1 X_2$$

или с учетом (3.1) к уравнению

$$(a^1_1 a^2_2 - a^2_1 a^1_2)(AX_1 + BX_2) = a^1_1 X_1 + a^2_1 X_2.$$

После приравнивания коэффициентов при операторах X_1, X_2 приходим к двум уравнениям (1.18)

$$\begin{aligned} (a^1_1 a^2_2 - a^2_1 a^1_2)A &= a^1_1, \\ (a^1_1 a^2_2 - a^2_1 a^1_2)B &= a^2_1 \end{aligned} \tag{3.3}$$

для четырёх неизвестных a^l_j. Общее решение системы (3.3) содержит два произвольных параметра и должно удовлетворять единственному требованию

$$\det \|a^l_j\| = a^1_1 a^2_2 - a^2_1 a^1_2 \neq 0.$$

Например, в качестве решения можно взять

$$\begin{aligned} a^1_1 &= kA, & a^2_1 &= kB \quad (k \neq 0), \\ a^1_2 &= -\frac{B}{A^2 + B^2}, & a^2_2 &= \frac{A}{A^2 + B^2}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

ISBN 5-7417-0124-8. Некоторые проблемы фундаментальной и прикладной математики. М., 1999

Сформулируем окончательный результат исследования двухмерных алгебр Ли на изоморфность.

1. Если для алгебры Ли с базисом X_1, X_2 выполнено условие (3.1), а для алгебры Ли с базисом $\hat{X}_1$, $\hat{X}_2$ — условие

$$[\hat{X}_1,\, \hat{X}_2] = \hat{A}\hat{X}_1 + \hat{B}\hat{X}_2, \tag{3.5}$$

и справедливы равенства

$$A = 0,\ B = 0, \quad \hat{A} = 0,\ \hat{B} = 0,$$

то алгебры изоморфны с любой неособенной матрицей перехода $\|a_j^l\|$ в (1.18) или в (1.19).

2. Если для алгебр Ли с условиями (3.1) и (3.5) выполняется $A^2+B^2 \neq 0$, $\hat{A}^2+\hat{B}^2 \neq 0$, то алгебры Ли изоморфны с матрицей $\|h_j^l\|$ перехода $\hat{X}_j = \sum\limits_{k=1}^{n} h_j^l X_l$, элементы матрицы равны

$$h_j^l = \sum_{k=1}^{n} \hat{b}_j^k a_k^l,$$

где $\|a_j^l\|$, $\|\hat{a}_j^l\| = \|\hat{b}_j^l\|^{-1}$ — матрицы перехода $\tilde{X}_j = \sum\limits_{k=1}^{n} a_j^l X_l$, $\tilde{X}_j = \sum\limits_{k=1}^{n} \hat{a}_j^l \hat{X}_l$ соответствующих алгебр к алгебре, для которой выполняется условие (3.2) (в качестве a_j^l, $\hat{a}_j^l$ могут быть взяты, например, функции (3.4)).

3. Если для одной из алгебр с условиями (3.1) и (3.5) выполнено $A^2 + B^2 = 0$, а для другой — $\hat{A}^2 + \hat{B}^2 \neq 0$, то алгебры Ли неизоморфны.

ISBN 5-7417-0124-8. Некоторые проблемы фундаментальной и прикладной математики. М., 1999

4. Изоморфизм трёхмерных алгебр Ли

Для трехмерных алгебр Ли [6—9] известна классификация, поэтому чтобы установить, изоморфны две алгебры или нет, надо определить, к какому классу эквивалентности принадлежат эти алгебры. Если они принадлежат к одному и тому же классу эквивалентности, то они изоморфны, если к разным классам, — то неизоморфны.

Чтобы определить, к какому именно классу эквивалентности принадлежит алгебра Ли, нужно сделать следующее.

В трехмерном случае ($n = 3$) из ненулевых структурных констант C^i_{jk} алгебры L можно составить трехмерную матрицу

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C^1_{23} & C^2_{23} & C^3_{23} \\ C^1_{31} & C^2_{31} & C^3_{31} \\ C^1_{12} & C^2_{12} & C^3_{12} \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

Элементы этой матрицы являются коэффициентами разложения векторных полей $X^1 = [X_2, X_3]$, $X^2 = [X_3, X_1]$, $X^3 = [X_1, X_2]$ по базису X_1, X_2, X_3 алгебры L. Ранг этой матрицы равен размерности производной алгебры $L^{(1)}$ и является инвариантом алгебры L.

$$\operatorname{rank} \mathbf{C} = \dim L^{(1)}.$$

Если $\operatorname{rank} \mathbf{C} = 0$, то алгебра является абелевой и принадлежит к классу эквивалентности I.

Если $\operatorname{rank} \mathbf{C} = 1$, то в этом случае нужно проверить, является ли матрица $\mathbf{C}$ симметрической ($\mathbf{C}^T = \mathbf{C}$) или нет. В первом случае алгебра L принадлежит к классу эквивалентности II, во втором — к классу эквивалентности III.

ISBN 5-7417-0124-8. Некоторые проблемы фундаментальной и прикладной математики. М., 1999

Рассмотрим случай, когда $\operatorname{rank}\mathbf{C} = 2$. В этом случае производная алгебра $L^{(1)}$ является двумерной абелевой алгеброй [7]. Нужно выбрать новый базис Y_1, Y_2, Y_3 алгебры L так, чтобы векторные поля Y_1, Y_2 образовывали базис алгебры $L^{(1)}$, а Y_3 дополнял бы этот базис до базиса алгебры L. Тогда $[Y_1, Y_2] = 0$, так как алгебра $L^{(1)}$ — абелева, а коммутаторы $[Y_1, Y_3]$ и $[Y_2, Y_3]$ можно разложить по базису алгебры $L^{(1)}$

$$\begin{aligned} &[Y_1, Y_2] = 0, \\ &[Y_1, Y_3] = \alpha Y_1 + \beta Y_2, \\ &[Y_2, Y_3] = \gamma Y_1 + \delta Y_2, \end{aligned}$$

причем матрица

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

является невырожденной матрицей.

Если собственные числа λ_1, λ_2 матрицы $\mathbf{T}$ действительные и совпадают ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$), то необходимо найти геометрическую кратность этого числа по формуле: $2 - \operatorname{rank}(\mathbf{T} - \lambda E)$, где 2 — порядок матрицы $\mathbf{T}$. Если геометрическая кратность корня λ равна 1, то алгебра L принадлежит классу эквивалентности IV. Если же геометрическая кратность равна 2, то алгебра L принадлежит классу эквивалентности V.

Если собственные числа λ_1, λ_2 матрицы $\mathbf{T}$ являются действительными числами и различные ($\lambda_1 \neq \lambda_2$), то алгебра относится к классу эквивалентности VI_q, где

$$q = \begin{cases} \lambda_2/\lambda_1, & \text{если } \lambda_2 > \lambda_1, \\ \lambda_1/\lambda_2, & \text{если } \lambda_2 < \lambda_1. \end{cases}$$

ISBN 5-7417-0124-8. Некоторые проблемы фундаментальной и прикладной математики. М., 1999

Если собственные числа матрицы $\mathbf{T}$ являются комплексными ($\lambda_1 = \mu + i\nu$, $\lambda_2 = \mu - i\nu$), то алгебра принадлежит к классу эквивалентности VII_q, где

$$q = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{|\lambda_1|} = \frac{2\mu}{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}}.$$

Осталось рассмотреть случай, когда $\operatorname{rank} \mathbf{C} = 3$. Если собственные числа матрицы $\mathbf{C}$ разных знаков, тогда алгебра L принадлежит классу эквивалентности VIII. А если собственные числа одного знака, то алгебра L принадлежит классу эквивалентности IX.

Проиллюстрируем этот алгоритм следующим примером.

Пример 4.1. Пусть заданы три алгебры Ли своими структурными соотношениями:

$$\begin{aligned}
[X_2, X_3] &= -2X_1 - X_2 + X_3, \\
[X_3, X_1] &= X_1 - 2X_2 + 2X_3, \\
[X_1, X_2] &= -X_1 + 2X_2 - 2X_3;
\end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}
[X_2, X_3] &= -4X_1 - 3X_2 - X_3, \\
[X_3, X_1] &= -X_1 - 2X_2 + X_3, \\
[X_1, X_2] &= -3X_1 - X_2 - 2X_3;
\end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}
[X_2, X_3] &= \tfrac{1}{2}(-X_1 - X_2 + X_3), \\
[X_3, X_1] &= \tfrac{1}{2}(3X_1 - X_2 + X_3), \\
[X_1, X_2] &= \tfrac{1}{2}(-3X_1 + X_2 - X_3).
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Надо определить, изоморфны ли эти алгебры между собой или нет?

Решение. Рассмотрим алгебры (4.3), (4.4), (4.5), и построим для них соответственно матрицы структурных констант (4.1):

$$\begin{pmatrix}-2 & -1 & 1\\ 1 & -2 & 2\\ -1 & 2 & -2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-4 & -3 & -1\\ -1 & -2 & 1\\ -3 & -1 & -2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1/2 & -1/2 & 1/2\\ 3/2 & -1/2 & 1/2\\ -3/2 & 1/2 & -1/2\end{pmatrix}.$$

Для всех этих матриц ранг матриц равен 2. Следовательно, производная алгебра $L^{(1)}$ — двухмерная. В соответствии с алгоритмом переходим к новому базису Y_1, Y_2, Y_3 алгебр L. Чтобы Y_1, Y_2 принадлежали алгебре $L^{(1)}$, в качестве векторов Y_1, Y_2 выберем первые два коммутатора из структурных соотношений (4.3)—(4.5) соответственно:

$$\begin{aligned} Y_1 &= -2X_1 - X_2 + X_3,\\ Y_2 &= X_1 - 2X_2 + 2X_3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_1 &= -2X_1 - X_2 + X_3,\\ Y_2 &= X_1 - 2X_2 + 2X_3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_1 &= -2X_1 - X_2 + X_3,\\ Y_2 &= X_1 - 2X_2 + 2X_3,\end{aligned}$$

а третий вектор для всех алгебр можем выбрать равным $Y_3 = X_3$. Так как $Y_1, Y_2 \in L^{(1)}$, то $[Y_1, Y_2] = 0$. Остальные коммутаторы имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} [Y_1, Y_3] &= -Y_1 + 2Y_2,\\ [Y_2, Y_3] &= -2Y_1 - Y_2;\end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned} [Y_1, Y_3] &= -3Y_1 + 4Y_2,\\ [Y_2, Y_3] &= -2Y_1 + Y_2;\end{aligned} \tag{4.7}$$

ISBN 5-7417-0124-8. Некоторые проблемы фундаментальной и прикладной математики. М., 1999

$$\begin{aligned} [Y_1, Y_3] &= \tfrac{1}{2}(-Y_1 + Y_2), \\ [Y_2, Y_3] &= \tfrac{1}{2}(-Y_1 - 3Y_2). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Следуя алгоритму, построим соответствующие соотношениям (4.6)—(4.8) матрицы $\mathbf{T}$ (4.2):

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -3/2 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа этих матриц равны соответственно:

$$\begin{array}{lll} \lambda_1 = -1 + 2i, & \lambda_1 = -1 + 2i, & \lambda_1 = 1, \\ \lambda_2 = -1 - 2i, & \lambda_2 = -1 - 2i, & \lambda_2 = 1. \end{array}$$

Следовательно, первые две алгебры (4.3) и (4.4) принадлежат к одному и тому же классу эквивалентности VII_q при $q = -2/\sqrt{5}$. Третья алгебра (4.5) принадлежит классу IV, так как для нее матрица $\mathbf{T}$ имеет единственное собственное число ($\lambda = 1$) кратности 2, геометрическая кратность которого равна 1.

Таким образом, алгебры (4.3) и (4.4) изоморфны и каждая из них неизоморфна алгебре (4.5). ◀

5. Компьютерная проверка необходимых условий

Составлена программа, которая вычисляет для алгебры Ли, заданной набором структурных постоянных $\{C_{ij}^k\}$, производный (2.2) и центральный (2.4) ряды размерностей. По следствию из предложения 2.1, если для двух алгебр производные (или центральные) ряды размерностей не совпадают, то алгебры неизоморфны. В частности, для алгебр, заданных структурными соотношениями

(4.3)—(4.5), программа приводит к совпадающим рядам (2.2) и (2.4): 3, 2, 0 (здесь и далее ряд обрывается или нулем, или повторением размерностей). Но, как показано в пункте 4, алгебры (4.3), (4.4) изоморфны, а пары (4.3), (4.5) и (4.4), (4.5) — неизоморфны, т.е. совпадение рядов (2.2) или (2.4) есть исключительно необходимое условие изоморфности.

В основе программы — вычисление ранга матрицы размера $n \times n(n-1)/2$ (n — размерность алгебры Ли, в (4.2) эта матрица приведена для $n = 3$). Для вычисления ранга требуется перебрать существенную часть миноров, что приводит к экспоненциальной зависимости вычислительной сложности от размерности алгебры. Работа программы была, в частности, проверена для пятимерной алгебры Ли, приведенной в [5]. Алгебра задана структурными постоянными (соотношения (19), (20) в [5]):

$$-C_{13}^1 = C_{23}^2 = 2, \;\; C_{12}^3 = -C_{14}^5 = -C_{34}^4 = -C_{25}^4 = C_{35}^5 = 1.$$

Результатом работы программы явился следующий результат для производного и центрального рядов размерностей: 5, 5.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Павловский Ю.Н., Яковенко Г.Н.* Группы, допускаемые динамическими системами//Методы оптимизации и их приложения/Новосибирск: Наука, 1982. С.155–189.

2. *Яковенко Г.Н.* Симметрии по состоянию в системах с управлением// Прикладная механика и математика: Сб. науч. тр./ МФТИ. М., 1992. С.155–176.

3. *Яковенко Г.Н.* Принцип суперпозиций для нелинейных систем: Софус Ли и другие: Учебное пособие. – М.: МФТИ, 1997. – 96 с.
4. Геометрические и алгебраические методы в теории управления/ *Данилов Н.Ю., Павловский Ю.Н., Соколов В.И., Яковенко Г.Н.*: Учебное пособие. – М.: МФТИ, 1999. – 156 с.
5. *Яковенко Г.Н., Козьминых Д.В., Ризен М.А.* Класс компактных математических моделей управляемых процессов//Некоторые проблемы фундаментальной и прикладной математики: Сб. науч. тр./Моск. физ.-техн. ин-т. – М., 1998. С.150–158.
6. *Bianchi L.* Lesioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di transformazioni sperri. Pisa, 1918.
7. *Джекобсон Н.* Алгебры Ли. – М.: Мир. 1964. 356 с.
8. *Шапуков Б.Н.* Задачи по группам Ли. Казань: Изд-во Казанского университета, 1989. – 152 с.
9. *Ивашко Д.Г.* Структура конечномерных допускаемых алгебр трехмерных управляемых систем//Некоторые проблемы фундаментальной и прикладной математики. Междувед. сб. ст./Моск. физ.-техн. ин-т. – М., 1997. – С. 97–109.

Получено 23.12.99