Модель общего равновесия при наличии транзакционных издержек и денежных суррогатов[1]

Гуриев С.М., Поспелов И.Г., Шапошник Д.В.
(Вычислительный центр РАН, Москва)

Аннотация.

В работе приводится обобщение некоторых результатов, полученных в последние годы группой сотрудников ВЦ РАН под рук. академика А.А. Петрова. Рассматривается модель общего равновесия, позволяющая учесть ограничения ликвидности, транзакционные издержки, торговые наценки, неопределенность цен и косвенные налоги. Доказывается существование равновесия и его неэффективность. Рассматривается возможность использования в расчетах денежных суррогатов – бартера, который трактуется как альтернативные деньги, и неплатежей, которые рассматриваются как взаимный кредит предприятий. Показано, что это разные механизмы, которым соответствуют различные состояния равновесия с разной степенью неэффективности. Равновесия с бартером эффективны, но отличаются от равновесия Эрроу-Дебрэ. Равновесия с неплатежами оказываются неэффективными и существенно неединственными.

1 Введение

Настоящая работа обобщает некоторые результаты, полученные при исследовании математических моделей переходной экономики [1,2], построенных в последние годы в ВЦ РАН под руководством академика А.А. Петрова. Сравнительно устойчивое функционирование российской экономики при заведомо неполном использовании *всех* имеющихся производственных факторов (труда, капитала, природных ресурсов) наводит на мысль о возможности существования неэффективного стационарного равновесного состояния децентрализованной экономической системы.

Основополагающим фактом общепринятой теории рынка является первая теорема благосостояния, которая утверждает, что конкурентное равновесие обеспечивает эффективное (в смысле выпуска конечной продукции) использование и распределение ресурсов. Этот результат тесно связан с принимаемым в классической модели рынка предположением о том, что продавцы и покупатели каждого товара оценивают его по одной и той же цене.

Моделируя различные конкретные механизмы взаимодействия экономических агентов в переходной экономике, мы часто приходили к выводу, что фактическая цена товара для покупателя и продавца может

[1] Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проекты №№98-01-0077, 96-15-96207. Авторы выражают признательность А.А.Петрову, А.А.Шананину, С.В.Чуканову и Н.Н.Оленеву и другим сотрудникам ВЦ РАН, а также участникам семинаров в ВЦ РАН, ЦЭМИ РАН, МИРЭА, Гарвардском центре русских исследований, конференции "Нелинейные процессы в физике и экономике" (Вашингтон, ноябрь 1997 г.) и конференции Российско-Европейского центра экономической политики (Москва, сентябрь 1998 г.) за помощь в выполнении работы и полезные замечания.

быть различной. Вследствие этого мы получали, что даже конкурентное равновесие может оказаться неэффективным[2]. В данной работе мы доказываем неэффективность общего равновесия в модели, которая учитывает самые разные причины разницы между покупными и продажными ценами – от завышенных торговых наценок и налогов до влияния ограничений ликвидности, задержек обращения и неопределенности.

Другая важная проблема переходной экономики – кризис неплатежей и распространение расчетов при помощи разного рода денежных суррогатов и бартерных обменов между предприятиями. Эти явления присутствовали в российской экономике с самого начала реформ и распространились особенно широко в последнее время (со второй половины 1995г.), в период жесткой денежной политики государства. Существует немало работ (см. например, [3-7]), в которых анализируются объем неплатежей и их структура по отраслям промышленности и вдоль технологических цепочек, экономические механизмы и институты, способствующие распространению неплатежей, денежных суррогатов и бартерных расчетов, возможные пути решения проблемы. Большинство авторов сходится во мнении, что рост неплатежей в последнее время связан с ужесточением денежной политики государства, однако увеличение денежной массы скорее всего не решит проблему неплатежей, а всего лишь приведет к росту цен.

Как правило, проблемы неплатежей, денежных суррогатов и бартера обсуждаются вместе. Мы будем отдельно рассматривать модели общего равновесия с взаимным кредитом (неплатежами) и с обращением альтернативных деньгам платежных средств (денежных суррогатов или бартерного обмена). Оказывается, что это – разные механизмы, по-видимому требующие по отношению к ним разной экономической политики. Общим для этих механизмов является то, что оба они уменьшают неэффективность, обусловленную разницей покупных и продажных цен. Мы следуем идее новой институциональной экономики (в частности, экономики транзакционных издержек) [8,9], которая заключается в том, что экономические институты возникают вследствие наличия транзакционных издержек и формируются таким образом, чтобы их минимизировать.

В западной литературе имеется ряд работ, посвященных анализу структуры финансовых рынков [10] и института бартера (см., например, [11-13]) с точки зрения транзакционных издержек. В этих работах доказывается, что при наличии транзакционных издержки или неполной информированности должно появиться единое платежное средство – деньги, а бартерные обмены должны исчезнуть.

Однако западные экономисты именно бартерные обмены связывают с большими транзакционными издержками. Для западной экономики это с ее развитой рыночной инфраструктурой, дешевым и доступным кредитом поиск партнера по бартерному обмену и нащупывание взаимовыгодных пропорций обмена действительно обходится относительно дорого. Но для современной российской

[2] Безусловно, неэффективность равновесия может быть также обусловлена и другими важными факторами, такими как неконкурентность рыночной среды, информационная асимметрия, экстерналии и др.

экономики, где с одной стороны, вокруг каждого денежного потока собирается множество посредников, вымогателей и мошенников, а с другой – партнеры для промышленных предприятий во многом предопределены еще при постройке этих предприятий в советское время, бартер вполне может оказаться более дешевым каналом реализации.

Таким образом, один и тот же по сути подход может в разных ситуациях использоваться для объяснения противоположных феноменов – самоорганизации единой денежной системы на Западе и распада такой системы в нынешней России.

Работа построена следующим образом. В разделе 2 мы описываем исходную модель общего равновесия замкнутой статической экономики (упрощенный вариант модели Эрроу-Дебре) и вводим необходимые понятия и технические предположения. В разделе 3 показываем, что при различии покупных и продажных цен в такой экономике возникает неэффективное равновесие. Обсуждаются также возможные причины устойчивого различия покупных и продажных цен. В разделах 4 и 5 модель дополняется описанием особого межфирменного оборота, оплата которого может производиться денежными суррогатами. Рассматриваются два вида платежных систем: бартер, как альтернативные деньги (раздел 4), и неплатежи, как взаимный кредит (раздел 5). Изучаются свойства этих механизмов, эффективность порождаемых ими равновесий и устанавливается их качественное различие между собой. В разделе 5 также приводится конкретный пример расчета указанных равновесий. В разделе 6 мы показываем, каким образом неплатежи способствует интеграции предприятий и анализируем эффективность равновесия при наличии интеграции. В разделе 7 подводятся итоги работы.

2 Статическая модель экономики и конкурентное равновесие (С-равновесие)

Базой для всех дальнейших рассуждений будет служить упрощенная модель Эрроу-Дебре [14] статической замкнутой экономики, в которой факторами производства служат производимые в ней продукты (сырье, топливо, электроэнергия и т.п.). Мы полагаем, что такая модель является наиболее подходящей формализаций современной экономической ситуации в России, когда предприятия постоянно жалуются на дефицит оборотных фондов, а прочие факторы производства – труд и капитал – явно недоиспользуются, а инвестиции пренебрежимо малы. Даже если масштабные инвестиции вдруг и возобновятся, в первое время, пока не будут освоены новые производственные мощности, влияние инвестиций скажется только на функции совокупного спроса.

Российская экономика, разумеется, не является замкнутой, но качественные особенности экономических механизмов легче изучать только на замкнутых моделях, в которых все цены определяются на рынках, описанных в рамках модели.

Модель описывает производство, распределение и потребление n видов продуктов. Производят продукты N отдельных производителей (фирм). Произведенные продукты распределяются между конечными потребителями и фирмами, которым эти продукты нужны в качестве факторов производства.

Доказательство результатов для самой общей формы описания производственных возможностей наталкивается на значительные технические трудности, поэтому мы ограничимся случаем, когда каждая фирма $\nu = 1,..,N$ может производить только один продукт $i_\nu \in \{1,...,n\}$, причем каждый продукт может выпускаться хотя бы одной фирмой.

Производственные возможности фирмы будем характеризовать непрерывной вогнутой монотонной ограниченной *производственной функцией* $f^\nu : \mathbf{R}_+^n \to \mathbf{R}_+^1$,

$$f^\nu(\mathbf{0}) = 0;\ f^\nu(\mathbf{w}) \geq 0 \quad , \qquad \frac{\partial f^\nu(\mathbf{w})}{\partial w_{i_\nu}} \equiv 0\,; \tag{2.1}$$

определяющей максимальный *чистый выпуск* $f^\nu(\mathbf{w})$ продукта i_ν фирмой ν при затратах $\mathbf{w} = \langle w_1,...,w_n \rangle$ остальных продуктов. (Здесь и далее полужирным шрифтом обозначены векторы в пространстве продуктов $\mathbf{R}^n$).

В большинстве случаев вместо производственной функции нам будет удобнее использовать вектор выпусков/затрат фирмы ν $\mathbf{z}^\nu = \langle z_1^\nu,...,z_n^\nu \rangle$. компонента которого $z_{i_\nu}^\nu$ указывает чистый выпуск продукта i_ν, а остальные – неположительные – показывают взятые с обратным знаком затраты. Множество допустимых векторов выпусков/затрат образуют технологическое множество фирмы ν

$$\mathbf{T}^\nu = \left\{ \mathbf{z}^\nu \middle| z_i^\nu \leq -w_i, i \neq i_\nu;\ z_{i_\nu}^\nu \leq f^\nu(\mathbf{w}) - w_{i_\nu}, \mathbf{w} \in \mathbf{R}_+^n \right\} \tag{2.2}$$

Совокупный чистый выпуск продукции фирмами описывается вектором $\sum_\nu \mathbf{z}^\nu$. Поскольку мы предполагаем производственные функции ограниченными, совокупный выпуск органичен сверху вектором $\mathbf{m} = \langle m_1,...,m_n \rangle$, который мы назовем вектором *производственных мощностей*

$$m_i = \sum_\nu \max_{\mathbf{z}^\nu \in \mathbf{T}^\nu} z_i\,; \qquad 0 < m_i < +\infty \tag{2.3}$$

Экономику в целом мы будем считать *продуктивной,* т.е. способной обеспечить положительное конечное потребление всех продуктов,

$$\mathbf{T} = \sum_\nu \mathbf{T}^\nu\,, \qquad \mathbf{T} \cap \operatorname{int} \mathbf{R}_+^n \neq \varnothing\,. \tag{2.4}$$

В некоторых случаях нам также потребуется условие *неразложимости* – для производства любого продукта требуются прямые или косвенные затраты всех остальных:

$$\sum_\nu \boldsymbol{z}^\nu \in \mathbf{R}^n_{++} \Rightarrow \forall i \in \{1,...,n\}\ \exists \nu \in \{1,...,N\}\ z_i^\nu > 0\,. \tag{2.5}$$

(Здесь и далее $\mathbf{R}^n_{++} = \mathbf{R}^n_+ \setminus \{\boldsymbol{0}\}$.)

Весьма сильное условие неразложимости, так же, как и требование, чтобы фирма производила один продукт, нужны для того, чтобы исключить нулевые цены в рассматриваемых ниже равновесных состояниях экономики.

Лемма 1. Пусть $\boldsymbol{z}^\nu \in \operatorname*{Argmax}_{\boldsymbol{z}^\nu \in \mathbf{T}^\nu} \boldsymbol{rz}^\nu$ для некоторого $\boldsymbol{r} \in \mathbf{R}^n_{++}$, а технологические множества имеют вид (2.1), (2.2). Если экономика продуктивна, то $\sum_\nu \boldsymbol{rz}^\nu > 0$. Если экономика продуктивна и неразложима, а $\sum_\nu \boldsymbol{z}^\nu \in \mathbf{R}^n_+$, то $\boldsymbol{r} \in \operatorname{int} \mathbf{R}^n_+$.

Доказательства всех лемм вынесены в Приложение.

Ниже мы будем отличать выпуски/затраты $\boldsymbol{z}^\nu$ от продаж $\boldsymbol{x}^\nu$ продукции $\boldsymbol{x}^\nu$ и закупок сырья $\boldsymbol{v}^\nu$

$$\boldsymbol{x}^\nu - \boldsymbol{v}^\nu \le \boldsymbol{z}^\nu \in \mathbf{T}^\nu, \qquad \boldsymbol{x}^\nu, \boldsymbol{v}^\nu \ge \boldsymbol{0} \qquad \nu = 1,...,N \tag{2.6}$$

Анализ потребительского спроса и распределения доходов не является целью настоящей работы. Поэтому будем описывать конечных потребителей простейшим способом – единой непрерывной монотонной вогнутой функцией полезности

$$\omega : \mathbf{R}^n_+ \to \mathbf{R}^1, \qquad \partial\omega \subset \mathbf{R}^n_{++}\,. \tag{2.7}$$

Потребители располагают денежным доходом $\psi \ge 0$. Этот доход они расходуют на покупку продуктов $\boldsymbol{c} = \langle c_1,...,c_n \rangle$ по ценам $\boldsymbol{p} = \langle p^1,...,p^n \rangle$. Будем называть поведение потребителей *рациональным* если

$$\boldsymbol{c} \in \operatorname*{Argmax}_{\boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^n_+} \{\, \omega(\boldsymbol{u}) \} \qquad \text{при условии} \qquad \boldsymbol{pu} \le \psi \tag{2.8}$$

(Подразумевается, что максимум достигается.)

Определение 1. Набор величин $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{c}$, ψ, $\boldsymbol{x}^\nu$, $\boldsymbol{v}^\nu$, $\boldsymbol{z}^\nu$, $\nu = 1,...,N$ будем называть *состоянием* экономики, если $\boldsymbol{p} \in \mathbf{R}^n_{++}$, $\boldsymbol{c}, \psi, \boldsymbol{x}^\nu, \boldsymbol{v}^\nu \ge 0$, $\boldsymbol{z}^\nu \in \mathbf{T}^\nu$; поведение потребителей рационально, (2.8); покупки продуктов не превосходят их совокупных продаж (материальный баланс), которые в свою очередь не превосходят совокупного производства;

$$\boldsymbol{c} \le \sum_\nu \left(\boldsymbol{x}^\nu - \boldsymbol{v}^\nu\right) \le \sum_\nu \boldsymbol{z}^\nu\,; \tag{2.9}$$

а доходы потребителей образуются из чистой прибыли продавцов (закон Вальраса)

$$\psi = \sum_{\nu} \left(\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}^{\nu} - \boldsymbol{p}\boldsymbol{v}^{\nu} \right) \qquad (2.10)$$

Два состояния назовем *совпадающими по натуральным показателям*, если в этих состояниях одинаковы конечное потребление $\boldsymbol{c}$ и выпуски/затраты всех фирм $\boldsymbol{z}^{\nu}$.

Мы формально не требуем в определении состояния выполнения индивидуальных технологических ограничений (2.6), поскольку в дальнейшем допустим возможность обменов между производителями по альтернативным каналам.

Приравнивая доходы потребителей (2.10) их расходам (2.8), мы, казалось бы, игнорируем сбережения. Однако и при учете сбережений в замкнутой экономике закон Вальраса выполняется, поскольку сбережения одних агентов явно или неявно оказываются кредитами для других (см., например, [15]).

Определение 2. Состояние экономики будем называть *эффективным,* если совокупное производство, которое осуществляется в этом состоянии $\boldsymbol{z} = \sum_{\nu} \boldsymbol{z}^{\nu}$ нельзя увеличить по всем компонентам сразу, т.е.

$$\boldsymbol{z} \in \operatorname*{Argmax}_{u \in \sum_{\nu} \mathbf{T}^{\nu}} \{\boldsymbol{r}\boldsymbol{u}\} \text{ для некоторого } \qquad \boldsymbol{r} \in \mathbf{R}^{n}_{++} \qquad (2.11)$$

Определение 3. Состояние экономики $\boldsymbol{p}_C$, ψ_C, $\boldsymbol{c}_C$, $\boldsymbol{x}^{\nu}_{C}$, $\boldsymbol{v}^{\nu}_{C}$, $\boldsymbol{z}^{\nu}_{C}$ называется конкурентным равновесием (*С-равновесием*), если

$$\left\{\boldsymbol{x}^{\nu}_{C}, \boldsymbol{v}^{\nu}_{C}, \boldsymbol{z}^{\nu}_{C}\right\} \in \operatorname*{Argmax}_{\boldsymbol{x}^{\nu}, \boldsymbol{v}^{\nu}, \boldsymbol{z}^{\nu}} \left\{\boldsymbol{p}_C \boldsymbol{x}^{\nu} - \boldsymbol{p}_C \boldsymbol{v}^{\nu}\right\} \qquad \text{при условии (2.6).} \qquad (2.12)$$

Теорема 1. Если производственные функции удовлетворяют условию (2.1), а функция полезности – условию (2.7), и экономика продуктивна, то С-равновесие существует, эффективно и $\boldsymbol{c} \in \operatorname*{Argmax}_{\boldsymbol{u} \in \mathbf{T}} \omega(\boldsymbol{u})$.

Несложное и вполне стандартное доказательство этой теоремы вынесено в Приложение.

Описанную простую модель равновесия мы будем использовать как базу для сравнения с другими моделями, которые формально отличаются от модели С-равновесия тем, что в них производители максимизируют не доход от продажи (2.12), а некоторый другой функционал.

3 Разница покупных и продажных цен и неэффективное экономическое равновесие (ВА-равновесие)

Эффективность конкурентного равновесия означает, что не существует другого состояния экономики с большим производством конечного продукта. Большинство статистических данных свидетельствует о том, что современное состояние российской экономики уступает по производству конечного продукта последним годам советской экономики. Безусловно, можно предложить различные объяснения этого эффекта, включая изменение потребительских предпочтений, перераспределение доходов, либерализацию внешней торговли. Однако мы считаем, что столь существенное падение конечного продукта наводит на мысль, что в российской экономике систематически реализуется некое неэффективное равновесие. Дополнительными аргументами в пользу неэффективности сложившегося состояния экономики служат избыток трудовых ресурсов и отсутствие инвестиций, в том числе в экспортные отрасли. Если бы состояние было бы эффективным, то в нем ощущался бы недостаток труда, либо основных фондов, либо природных ресурсов. Ничего подобного в пореформенной России не наблюдается. Именно поэтому мы считаем нашей задачей описание неэффективного равновесия в децентрализованной экономике.

Эффективное производство в конкурентной экономике реализуется потому что все производители оценивают все продукты в одних и тех же ценах (см. (2.12)). Возникает предположение, что неэффективность связана с систематическим различием покупных и продажных цен на продукты или различным восприятием одних и тех же номинальных цен покупателем и продавцом.

Приведем несколько примеров экономических взаимодействий, которые приводят к различию покупной p^b и продажной p^s цены некоторого товара.

Налоги*.* Простейший пример ситуации, в которой возникает разница цен, дают косвенные налоги (акцизы). Пусть рыночная цена некоторого товара p, а налог составляет долю n стоимости товара. Если налог взимается с продавца, то покупатель оценивает товар по цене $p^b = p$, а продавец – по цене $p^s = (1-n)\, p$. Если же налог взимается с покупателя товара, то $p^b = (1+n)\, p$, а $p^s = p$.

Торговые наценки. Теоретически торговая наценка является оплатой оказанных торговцем услуг, которые увеличивают потребительскую полезность товара, и никакой разницы цен не возникает. Однако российская торговля характеризуется столь высокими торговыми наценки, а коррупция и рэкет в ней настолько распространены, что естественно описывать основную часть торговой наценки не как нормальную прибыль поставщиков торговых услуг, а как своеобразную ренту, взимаемую владельцами каналов сбыта (продажными чиновниками, организованной преступностью и недобросовестной администрацией промышленных предприятий, торгующей продукцией к своей выгоде и в ущерб предприятию). Такое положение дел вынуждает рассматривать торговую наценку подобно косвенным налогам. Представляется, что если в российской экономике и проявляются монопольные эффекты, так это именно в сфере посреднической торговли.

Подчеркнем, что изъятие части доходов производителей государством или посредниками *не* означают изъятия денег из оборота, поскольку и налоговые, и рентные платежи производителей являются доходами соответственно государства и рантье, и в замкнутой экономике порождают дополнительный платежеспособный спрос. В частности, по крайней мере в односекторной модели замкнутой экономики равновесие с ненулевым выпуском возможно при *любой* норме налога с оборота, меньшей 1. Например, при отчислении 99% выручки производителя в доход государства такая экономика в принципе будет работать, только общественное потребление (за счет бюджета) будет намного больше личного потребления (за счет доходов предприятий). Аналогично, в случае высоких торговых наценок большая часть потребления осуществляется получателями ренты а не рабочими и собственниками фирм-производителей.

Задержки обращения. Пример механизма возникновения разницы покупных и продажных цен, не связанного с изъятием доходов, дает учет задержек обращения в условиях высокой инфляции (см. [15]). Если продавец получает выручку от продажи продукта с задержкой τ, а цены растут с темпом γ, то свой реальный доход от единицы товара он должен оценивать величиной $p^s = e^{-\gamma\tau}p$ (при этом $p^b = p$). Принцип предоплаты не устраняет разницы реальных цен для покупателя и продавца – в этом случае $p^s = p$, но $p^b = e^{\gamma\tau}p$.

Ограничения ликвидности. Еще менее очевидный пример дает учет ограничений ликвидности в динамической модели равновесия с внутренним дисконтированием доходов. Его мы рассмотрим несколько подробнее в простейшем случае. Пусть производитель продает свою продукцию *X* по цене *p,* покупает сырье *V* по цене *q* и располагает запасом денег *M,* который изменяется со временем по закону

$$\frac{dM}{dt} = p(t)X(t) - q(t)V(t) - \Pi(t)\,,$$

где Π – извлекаемый доход. Запас денег необходим производителю для осуществления текущих расходов (ограничение ликвидности):

$$M(t) \geq \vartheta q(t)V(t),$$

где ϑ – постоянная времени, характеризующая запас денег, необходимый для осуществления потока расходов.

Допустим, что производитель оценивает результат будущих операций ожидаемым дисконтированным доходом

$$J=\int_t^{\infty} e^{-\delta(\xi-t)}\Pi(\xi)d\xi,$$

где δ – внутренний коэффициент дисконтирования, который можно трактовать как реальную ставку процента и/или оценку обратной величины горизонта планирования [16]. Нетрудно показать [17], что если производитель прогнозирует неизменные цены $p(\xi)=p(t), q(\xi)=q(t)$, то он должен планировать выпуск X и затраты V таким образом, чтобы максимизировать величину

$$\frac{1}{1+\delta\vartheta}p(t)X(\xi)-q(t)V(\xi) \tag{3.1}$$

Это означает, что производитель оценивает свою продукцию в ценах

$$p^s=\frac{1}{1+\delta\vartheta}p(t).$$

Результат может показаться странным, поскольку при постоянных ценах и выпусках запас денег M не меняется, и максимальный поток дохода получается при максимизации величины $p(t)X(\xi)-q(t)V(\xi)$, а не (3.1). Дело здесь в том, что уменьшая объем производства и затраты, производитель получает возможность изъять часть запаса денег, и этот разовый доход с учетом дисконтирования может быть выгоднее поддержания в дальнейшем большего потока прибыли.

Имеется много прямых и косвенных свидетельств того, что значительная часть нынешних российских предпринимателей руководствуется сугубо краткосрочными интересами, так что внутренний коэффициент дисконтирования δ производителей следует считать большим. Реальная ставка процента также высока (за счет риска и спроса на заемные средства со стороны государства). В то же время в российской экономике явно ощущается дефицит денег, так что ограничения ликвидности существенны. Они и должны быть существенны в условиях неразвитого рынка оборотного капитала. Все это приводит к тому, что описанный эффект, приводящий к недогрузке производства, может оказаться значительным. Хронический недостаток оборотного капитала, возникающий в этой простой модели, может частично объяснить и отсутствие инвестиций в основной капитал.

Неопределенность цен. Еще один пример различия покупных и продажных цен – восприятие неопределенности цен несклонными к риску агентами. Даже если и покупатель, и продавец имеют одинаковую информацию о вероятностном распределении цены, воспринимаемые продавцом и покупателем цены будут отличаться: $p^s < Ep < p^b$. Здесь Ep –

математическое ожидание цены. Строгое описание поведения предприятия в такой ситуации приводится в [18].

Перечисленные эффекты можно учесть единым образом в рамках описанной выше модели экономики, если предположить, что производители стремятся максимизировать не номинальный доход (2.12), а величину $\boldsymbol{p}A^{\nu}\boldsymbol{x}^{\nu} - \boldsymbol{p}B^{\nu}\boldsymbol{v}^{\nu}$, где $A^{\nu} = \mathrm{diag}\left(a_1^{\nu},...,a_1^{\nu}\right)$, $B^{\nu} = \mathrm{diag}\left(b_1^{\nu},...,b_1^{\nu}\right)$ – диагональные матрицы такие, что

$$0 < a_i^{\nu} \le 1 \le b_i^{\nu}, \ \nu = 1,...,N \ \ i = 1,...,n \qquad (3.2)$$

Ниже будем считать матрицы A^{ν}, B^{ν} заданными и постоянными. Для описания торговых наценок более реалистичным было бы считать A^{ν}, B^{ν} зависящими от цен и объемов обмена. Частный случай такой более сложной модели рассмотрен в [19].

<u>Определение</u> 4. Состояние экономики $\boldsymbol{p}_{BA}$, ψ_{BA}, $\boldsymbol{c}_{BA}$, $\boldsymbol{x}_{BA}^{\nu}$, $\boldsymbol{v}_{BA}^{\nu}$, $\boldsymbol{z}_{BA}^{\nu}$ называется *ВА-равновесием*[3] если

$$\left\{\boldsymbol{x}_{BA}^{\nu}, \boldsymbol{v}_{BA}^{\nu}, \boldsymbol{z}_{BA}^{\nu}\right\} = \underset{\boldsymbol{x}^{\nu},\boldsymbol{v}^{\nu},\boldsymbol{z}^{\nu}}{\mathrm{Argmax}} \left\{\boldsymbol{p}_{BA}A^{\nu}\boldsymbol{x}^{\nu} - \boldsymbol{p}_{BA}B^{\nu}\boldsymbol{v}^{\nu}\right\}, \text{ при условии (2.6)} \qquad (3.3)$$

Подчеркнем еще раз, что различие покупных и продажных цен не связано с изъятием денег из оборота. Все затраты конечных потребителей $\sum_{\nu}\left(\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}^{\nu} - \boldsymbol{p}\boldsymbol{v}^{\nu}\right)$ так или иначе возвращаются к ним в виде доходов ψ, и закон Вальраса сохраняет вид (2.10). Просто при наличии транзакционных издержек часть этого денежного потока минует производителя или не воспринимается им как прибыль.

Если A^{ν}, B^{ν} равны единичным матрицам (отсутствуют транзакционные издержки), то ВА-равновесие превращается в С-равновесие. Если же A^{ν} слишком малы и/или B^{ν} слишком велики и то ВА-равновесие сильно отличается от С-равновесия и даже в продуктивной экономике (2.4) может стать вырожденным.

<u>Определение</u> 5. ВА-равновесие назовем *вырожденным,* если $c_{BA} = \boldsymbol{0}$.

Для вырождения ВА-равновесия необходимо, чтобы $0 = \psi_{BA} = \sum_{\nu}\left(\boldsymbol{p}_{BA}\boldsymbol{x}_{BA}^{\nu} - \boldsymbol{p}_{BA}\boldsymbol{v}_{BA}^{\nu}\right) \ge \sum_{\nu}\left(\boldsymbol{p}_{BA}A^{\nu}\boldsymbol{x}_{BA}^{\nu} - \boldsymbol{p}_{BA}B^{\nu}\boldsymbol{v}_{BA}^{\nu}\right)$, т.е. чтобы решения задач (3.3) при $\nu = 1,\dots,N$ все были нулевыми при ненулевых ценах. Возможно это или нет, зависит от соотношения между набором матриц $\left\langle A^{\nu}, B^{\nu}\right\rangle$ и набором производственных функций f^{ν}. В связи с эти введем следующее определение.

[3] От английского "bid-ask spread" – разница покупных и продажных цен.

Определение 6. Набор диагональных матриц $\langle A^{\nu}, B^{\nu} \rangle$ назовем *прибыльным* для производственных функций (2.1), если

$$\psi_{-} = \min_{\boldsymbol{p}\in\mathbf{P}^n} \max_{\nu} \max_{\boldsymbol{0}\le\boldsymbol{w}\le\boldsymbol{m}} \left(a^{\nu}_{i_\nu} p_{i_\nu} f^{\nu}(\boldsymbol{w}) - \boldsymbol{p}B^{\nu}\boldsymbol{w}\right) > 0\,, \tag{3.4}$$

и *убыточным*, если

$$\psi_{+} = \max_{\boldsymbol{p}\in\mathbf{P}^n} \max_{\nu} \max_{\boldsymbol{0}\le\boldsymbol{w}\le\boldsymbol{m}} \left(a^{\nu}_{i_\nu} p_{i_\nu} f^{\nu}(\boldsymbol{w}) - \boldsymbol{p}B^{\nu}\boldsymbol{w}\right) \le 0\,. \tag{3.5}$$

(Здесь и ниже $\mathbf{P}^n$ – единичный симплекс в $\mathbf{R}^n$.)

При доказательстве существования равновесия в моделях с транзакционными издержками возникает определенная трудность. В отличие от классической задачи (2.12), решение индивидуальной задачи (3.3) не определяет однозначно величину вклада фирмы в доход потребителя $\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}^{\nu} - \boldsymbol{p}\boldsymbol{v}^{\nu}$. Поэтому ниже мы используем следующий результат.

Лемма 2. Пусть многозначное отображение $\mathrm{S}:\mathbf{P}^n \to 2^{\mathbf{R}^n}$ (функция совокупного предложения), заданное на симплексе цен $\mathbf{P}^n$ имеет выпуклые компактные образы, и замкнутый график, а также удовлетворяет условию

$$\boldsymbol{p}\boldsymbol{w} > 0 \qquad \text{при } \boldsymbol{p}\in\mathbf{P}^n, \qquad \boldsymbol{w}\in\mathrm{S}(\boldsymbol{p}) \tag{3.6}$$

Если функция полезности удовлетворяет условиям (2.7), то существуют равновесные цены $\boldsymbol{p}_* \in \mathbf{P}^n$, вектор совокупного предложения $\boldsymbol{u}_*$ и вектор конечного потребления $\boldsymbol{c}_* \in \mathbf{R}^n_+$, такие что

$$\boldsymbol{w}_* \in \mathrm{S}(\boldsymbol{p}_*),\ \boldsymbol{c}_* \le \boldsymbol{w}_*,\ \boldsymbol{c}_* \in \operatorname*{Argmax}_{\boldsymbol{c}\in\mathbf{R}^n_+,\ \boldsymbol{p}_*\boldsymbol{c}\le\boldsymbol{p}_*\boldsymbol{u}_*} \omega(\boldsymbol{c})$$

При доказательстве (см. Приложение) мы расширяем пространство продуктов, рассматривая доход ψ ("денежную массу") как независимый параметр подлежащий выбору в равновесии. Представляется, что этот прием соответствует сути дела, так как специфика ВА-равновесия связана с неидеальностью денежного обращения.

Теорема 2. Пусть производственные функции удовлетворяют условию (2.1), функция полезности – условию (2.7) и экономика продуктивна (2.4). Если набор матриц $\langle A^{\nu}, B^{\nu} \rangle$ убыточен, то ВА-равновесие существует, но вырождено. Если набор матриц $\langle A^{\nu}, B^{\nu} \rangle$ прибыльный, то ВА-равновесие существует и невырождено.

Доказательство. Если набор матриц $\langle A^{\nu}, B^{\nu} \rangle$ убыточен, то, как легко проверить, взяв любое $\boldsymbol{p}_{BA} > 0$ и положив $\psi_{BA} = \boldsymbol{c}_{BA} = \boldsymbol{x}^{\nu}_{BA} = \boldsymbol{v}^{\nu}_{BA} = \boldsymbol{z}^{\nu}_{BA} = 0,$ мы получим вырожденное ВА-равновесие. Невырожденного ВА-равновесия в этом случае существовать не может, т.к. в силу (3.5) из решений локальных задач (3.3) и закона Вальраса (2.10) следует, что $\psi_{BA} = 0$ при любых $\boldsymbol{p}_{BA}$, но при $\psi_{BA} = 0$ множество наборов благ, рациональных с точки зрения потребителя (2.8), либо пусто, либо состоит из нулевого набора.

Пусть набор матриц $\langle A^{\nu}, B^{\nu} \rangle$ прибыльный. Определим предложение продуктов производителем $\nu = 0,1,\ldots,N$ как многозначное отображение: $S^{\nu}(\boldsymbol{p}) = \{(\boldsymbol{x}^{\nu} - \boldsymbol{v}^{\nu})\}$, где $\boldsymbol{x}^{\nu}, \boldsymbol{v}^{\nu}$ – все возможные решения задачи

$$\boldsymbol{p}A^{\nu}\boldsymbol{x}^{\nu} - \boldsymbol{p}B^{\nu}\boldsymbol{v}^{\nu} \to \max_{\substack{\boldsymbol{x}^{\nu} - \boldsymbol{v}^{\nu} \le \boldsymbol{z}^{\nu} \in \mathrm{T}^{\nu} \\ \boldsymbol{x}^{\nu}, \boldsymbol{v}^{\nu} \ge \boldsymbol{0}}} \quad \text{при ограничениях} \quad \boldsymbol{v}^{\nu} \le 2\boldsymbol{m};\ \boldsymbol{z}^{\nu} \ge -3\boldsymbol{m}. \qquad (3.7)$$

Отображение $S^{\nu} : \mathbf{P}^{n} \to 2^{R^{n}}$ имеет непустые компактные образы и замкнутый график, поскольку функционал задачи (3.7) непрерывен, а допустимая область компактна и не зависит от $\boldsymbol{p}$. Совокупное предложение определим как $S(\boldsymbol{p}) = \sum_{\nu} S^{\nu}(\boldsymbol{p})$.

Поскольку набор матриц $\langle A^{\nu}, B^{\nu} \rangle$ прибыльный, максимальные значения функционалов задач (3.7) все неотрицательны и не все равны 0. Поэтому при $\boldsymbol{w} \in S(\boldsymbol{p})$ $\boldsymbol{pw} = \sum_{\nu} \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}^{\nu} - \boldsymbol{v}^{\nu}) \ge \sum_{\nu} (\boldsymbol{p}A^{\nu}\boldsymbol{x}^{\nu} - \boldsymbol{p}B^{\nu}\boldsymbol{v}^{\nu}) > 0$. Таким образом, $S(\boldsymbol{p})$ удовлетворяет условиям Леммы 2 и, следовательно, существуют цены, $\boldsymbol{p}_{*}$, вектор конечного потребления $\boldsymbol{c}_{*}$ и решения задач (3.7), $\boldsymbol{x}^{\nu}_{*}$, $\boldsymbol{v}^{\nu}_{*}$ и $\boldsymbol{z}^{\nu}_{*}$, удовлетворяющие условию материального баланса (2.9), закону Вальраса (2.10) и условию рациональности поведения потребителя (2.8) при $\psi_{*} = \boldsymbol{p}_{*}\boldsymbol{c}_{*}$.

Положим[4] $\boldsymbol{x}^{\nu}_{BA} = [\boldsymbol{x}^{\nu}_{*} - \boldsymbol{v}^{\nu}_{*}]_{+}$, $\boldsymbol{v}^{\nu}_{BA} = [\boldsymbol{x}^{\nu}_{*} - \boldsymbol{v}^{\nu}_{*}]_{-}$, $\boldsymbol{z}^{\nu}_{BA} = \boldsymbol{z}^{\nu}_{*}$. Поскольку эти векторы получаются из $\boldsymbol{x}^{\nu}_{*}$, $\boldsymbol{v}^{\nu}_{*}$ вычитанием одного и того же неотрицательного вектора, они, во-первых, вместе с $\boldsymbol{p}_{*}$, $\boldsymbol{c}_{*}$, ψ_{*} удовлетворяют закону Вальраса и балансу

$$\boldsymbol{c}_{*} \le \sum_{\nu} (\boldsymbol{x}^{\nu}_{BA} - \boldsymbol{v}^{\nu}_{BA}), \qquad (3.8)$$

во-вторых, в силу (3.2) являются решением задачи (3.7), а в-третьих удовлетворяют неравенству

[4] Здесь и ниже $\boldsymbol{y}_{+}$, $\boldsymbol{y}_{-}$ обозначают, соответственно, векторы, составленные из положительных и отрицательных частей компонент вектора $\boldsymbol{y}$.

$$\boldsymbol{x}^{\nu}_{BA} = \left[\boldsymbol{x}^{\nu}_{*} - \boldsymbol{v}^{\nu}_{*}\right]_{+} \le \left[\boldsymbol{z}^{\nu}_{*}\right]_{+}$$

Из (2.3) и двух последних неравенств следует, что

$$\boldsymbol{m} \ge \sum\nolimits_{\nu} \boldsymbol{x}^{\nu}_{BA} \ge \boldsymbol{c}_{*} + \sum\nolimits_{\nu} \boldsymbol{v}^{\nu}_{BA} \ , \tag{3.9}$$

откуда $2\boldsymbol{m} > \boldsymbol{v}^{\nu}_{BA}$ и, следовательно, в силу (2.6) $-3\boldsymbol{m} < \boldsymbol{z}^{\nu}_{BA}$. Поэтому $\boldsymbol{x}^{\nu}_{BA}$, $\boldsymbol{v}^{\nu}_{BA}$, $\boldsymbol{z}^{\nu}_{BA}$ являются решением не только "обрезанной" задачи (3.7), но и исходной задачи (3.3).

Положив теперь $\boldsymbol{p}_{BA} = \boldsymbol{p}_{*}$, $\psi_{BA} = \psi_{*}$, $\boldsymbol{c}_{BA} = \boldsymbol{c}_{*}$, получаем искомое равновесие.

Подчеркнем, что существование ВА-равновесия доказано без довольно сильного предположения (2.5) о неразложимости экономики.

В пространстве наборов диагональных матриц $\left\langle A^{\nu}, B^{\nu} \right\rangle$, удовлетворяющих (3.2), множество прибыльных наборов в силу (3.4) открыто и для продуктивной экономики (2.4) не пусто, поскольку по лемме 1 содержит набор, состоящий из единичных матриц. Таким образом существуют наборы матриц $\left\langle A^{\nu}, B^{\nu} \right\rangle$, отличных от единичной, для которых ВА-равновесие не может быть вырожденным.

Что же касается исключенного условиями теоремы промежуточного случая, когда при некоторых, но не при всех $\boldsymbol{p}$ решения всех индивидуальных задач (3.3) нулевые, то при его рассмотрении возникают трудности, связанные с известной нерегулярностью функции спроса вида (2.8) при $\psi = 0$. Если, как это часто делают, регуляризировать спрос, приписав конечным потребителям положительные запасы продуктов, то, добавив эти запасы к функции совокупного предложения и буквально повторяя приведенные выше рассуждения, можно доказать существование ВА-равновесия при любых A^{ν}, B^{ν} и любых ограниченных сверху, замкнутых выпуклых технологических множествах, а не только при $\mathbf{T}^{\nu}$ вида (2.2). Однако при этом остается неясным будет ли ВА-равновесие невырожденным и может ли одновременно существовать вырожденное и невырожденное ВА-равновесие. С другой стороны, начальные запасы продуктов у потребителей будут неестественны и весьма неудобны, когда мы ниже будем рассматривать модели с несколькими каналами реализации продукции. Поэтому мы ограничились более частной, но дающей более ясные результаты теоремой 2.

Важнейшим отличием ВА-равновесия от С-равновесия является то, что даже невырожденное ВА-равновесие, как правило, неэффективно.

<u>Теорема 3</u>. В ВА-равновесии векторы выпусков-затрат $\boldsymbol{z}^{\nu}_{BA}$ лежат на границах технологических множеств: $z^{\nu}_{BA i_{\nu i}} = f^{\nu}\left(-\boldsymbol{z}_{BA}\right)$. Если в этих точках производственные функции f^{ν} дифференцируемы, у всех производителей

при реализации каждого продукта есть транзакционные издержки[5] – $A^\nu < B^\nu$ – и хотя бы один производитель несет ненулевые затраты – $p^i_{BA} z^\nu_{BA\ i} < 0$ некоторых ν, i – то ВА-равновесие неэффективно.

Доказательство. Решение локальной задачи (3.3) имеет вид $\boldsymbol{z}^\nu_{BA} \in \underset{\boldsymbol{z}^\nu \in \mathbf{T}^\nu}{\operatorname{Argmax}}\ \boldsymbol{p}_\nu \boldsymbol{z}^\nu$, где $p^i_\nu = p^i_{BA} a^\nu_i$, если $\boldsymbol{z}^\nu_{BA\ i} \ge 0$ и $p^i_\nu = p^i_{BA} b^\nu_i$, если $\boldsymbol{z}^\nu_{BA\ i} < 0$. Отсюда следует, что $\boldsymbol{z}^\nu_{BA} \in \partial \mathbf{T}^\nu$.

Допустим, что ВА-равновесие эффективно в смысле (2.11). Тогда для некоторого $\boldsymbol{r} \in \mathbf{R}^n_{++}$ и $\boldsymbol{z} = \sum_\nu \boldsymbol{z}^\nu_{BA}$ $\boldsymbol{rz} = \max_{\boldsymbol{z}^\nu \in \mathbf{T}^\nu} \sum_\nu \boldsymbol{rz}^\nu = \sum_\nu \max_{\boldsymbol{z}^\nu \in \mathbf{T}^\nu} \boldsymbol{rz}^\nu = \sum_\nu \boldsymbol{rz}^\nu_{BA}$, откуда следует, что $\boldsymbol{rz}^\nu_{BA} = \max_{\boldsymbol{z}^\nu \in \mathbf{T}^\nu} \boldsymbol{rz}^\nu$, т.е. в эффективном состоянии все производители максимизируют прибыль, исчисленную в одних и тех же ценах $\boldsymbol{r}$. В силу дифференцируемости производственных функций нормаль к $\mathbf{T}^\nu$ в точке $\boldsymbol{z}^\nu_{BA}$ единственна, так что $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{p}_\nu$ для всех ν. Рассмотрим i и ν, для которых $p^i_{BA} z^\nu_{BA\ i} < 0$. Так как $\sum_\nu z^\nu_{BA\ i} \ge 0$, найдется производитель μ, который выпускает данный продукт $z^\mu_{BA\ i} > 0$. Из вышесказанного следует, что $r^i = p^i_{BA} a^\mu_i < p^i_{BA} b^\nu_i = r^i$ (см. (3.2)). Полученное противоречие доказывает утверждение.

Если состояние экономики эффективно, то можно подобрать какую-нибудь монотонную функцию полезности, точка максимума которой на совокупном технологическом множестве совпадает с данным состоянием. Эффективное состояние также доставляет максимум совокупной прибыли производителей в некоторых ценах. Таким образом, эффективное состояние описывается некоторым принципом оптимальности. Теорема 3 показывает, что ВА-равновесие, вообще говоря, не обеспечивает максимума никакой монотонной функции полезности потребления. Нельзя также указать таких цен, в которых ВА-равновесие максимизировало бы совокупную прибыль производителей[6]. В частном случае, когда матрицы A^ν и B^ν одинаковы для всех производителей и пропорциональны единичной матрице, А.А. Шананин указал вариационное неравенство в специально расширенном пространстве продуктов, которое характеризует ВА-равновесие. В этом расширенном пространстве некоторым продуктам приписывается отрицательная полезность.

---

[5] Здесь и ниже неравенства для диагональных матриц понимаются как неравенства для векторов составленных из и диагональных элементов матриц.

[6] По определению, ВА-равновесие является γ-эффективным в смысле [21] при $\gamma = BA^{-1}-1$, но γ-эффективность есть по существу не что, иное как переформулировка ВА-равновесия.

4 Общее равновесие при наличии бартера (B-равновесие)

Изложенная выше модель неэффективного конкурентного равновесия (BA-равновесия) предполагает, что в экономике существует единое платежное средство (деньги), которое служит универсальным измерителем стоимости. Для современной российской экономики (как, впрочем, и дореформенной советской экономики) характерно наличие нескольких платежных средств, отличающихся сферами обращения. В советской экономике такими средствами служили наличные и безналичные деньги, а в пореформенной российской экономике на роль второго платежного средства в разное время претендовали различные финансовые инструменты – конвертируемая валюта, казначейские обязательства и налоговые освобождения, векселя, взаимные неплатежи предприятий и др. Мы считаем возможным рассматривать в этом ряду и бартер, считая, что при бартерном обмене складываются более менее единые относительные цены. По всей видимости, как только курс и условия альтернативного платежного средства стабилизируется, оно перестает играть свою роль и возникает новое платежное средство. Ниже мы рассмотрим три различных механизма уменьшения неэффективности BA-равновесия: квазиденьги (векселя), бартер и неплатежи, которые мы трактуем как взаимный кредит предприятий.

В этом разделе мы рассмотрим модель, в которой предприятия могут расплачиваться друг с другом не только деньгами, но и альтернативными платежными средствами (назовем их “квазиденьгами”). Квазиденьги отличаются от денег тем, что их нельзя использовать в расчетах с конечным потребителем, зато для них нет транзакционных издержек и ограничений ликвидности – квазиденьги эмитируются предприятиями по мере необходимости. Примером квазиденег могут служить векселя предприятий. Заметим, что данная модель также описывает бартерную экономику, в которой предприятия получают деньги лишь за поставки на свободный рынок, а между собой могут рассчитываться без использования денег.

Итак, рассмотрим предприятие, которое максимизирует эффективную прибыль $\boldsymbol{p}A^{\nu}\boldsymbol{x}^{\nu} - \boldsymbol{p}B^{\nu}\boldsymbol{v}^{\nu}$. Однако теперь мы предположим, что предприятие может также оперировать не только на денежном рынке с транзакционными издержками, но и втором – бартерном (или квазиденежном) рынке со своими ценами $\boldsymbol{q}$. Обозначим вектор чистых бартерных поставок через $\boldsymbol{t}^{\nu}$ (положительные компоненты соответствуют поставкам, отрицательные – закупкам). Бартерные операции должны быть неубыточными в ценах $\boldsymbol{q}$:

$$\boldsymbol{q}\boldsymbol{t}^{\nu} \geq 0 . \tag{4.1}$$

Это условие можно интерпретировать как бюджетное ограничение по квазиденьгам.

Технологические ограничения на производство, продажи и покупки производителей вместо (2.6) теперь принимают вид

$$\boldsymbol{x}^{\nu} + \boldsymbol{t}^{\nu} - \boldsymbol{v}^{\nu} \le \boldsymbol{z}^{\nu}, \qquad \boldsymbol{x}^{\nu}, \boldsymbol{v}^{\nu} \ge \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{z}^{\nu} \in T^{\nu}. \tag{4.2}$$

Определение 7. Состояние экономики $\boldsymbol{p}_B$, $\boldsymbol{c}_B$, ψ_B, $\boldsymbol{x}_B^{\nu}$, $\boldsymbol{v}_B^{\nu}$, $\boldsymbol{z}_B^{\nu}$ (см. Определение 1) будем называть *B-равновесием* если существуют бартерные цены $\boldsymbol{q}_B$ и поставки $\boldsymbol{t}_B^{\nu}$, такие что $\boldsymbol{p}_B, \boldsymbol{q}_B \in \mathbf{R}_{++}^{n}$;

$$\left\{\boldsymbol{x}_B^{\nu}, \boldsymbol{v}_B^{\nu}, \boldsymbol{t}_B^{\nu}, \boldsymbol{z}_B^{\nu}\right\} = \underset{\boldsymbol{x}^{\nu}, \boldsymbol{t}^{\nu}, \boldsymbol{v}^{\nu}, \boldsymbol{z}^{\nu},}{\mathrm{Argmax}} \left(\boldsymbol{p}_B A^{\nu} \boldsymbol{x}^{\nu} - \boldsymbol{p}_B B^{\nu} \boldsymbol{v}^{\nu}\right) \text{ при условиях } \quad (4.1),(4.2) \tag{4.3}$$

и бартерные обмены сбалансированы

$$0 \le \sum\nolimits_{\nu} \boldsymbol{t}_B^{\nu}; \tag{4.4}$$

Теорема 4. B-равновесие эффективно. Если экономика продуктивна и неразложима, то B-равновесие существует, причем такое, что

$$\boldsymbol{q}_B = \lambda \boldsymbol{p}_B A^{*},$$

где λ – произвольное положительное число, а A^{*} – "верхняя огибающая" матриц A^{ν}

$$A^{*} = \mathrm{diag}\left\langle a_1^{*}, ..., a_n^{*} \right\rangle, \qquad a_i^{*} = \max_{\nu} \left\{a_i^{\nu}\right\}. \tag{4.5}$$

Если $a_i^{*} < b_i^{\nu}$ для всех i, ν, то в указанном B-равновесии потребности производителей в сырье целиком удовлетворяются за счет бартера – $\boldsymbol{v}_B^{\nu} = \boldsymbol{0}$ для всех ν.

Доказательство. Индивидуальная задача фирмы (4.3) – это задача вогнутого программирования, причем для ограничений (4.2), (4.1) выполнены условия Слейтера, поскольку неравенства (4.2), (4.1) можно сделать строгими, увеличив $\boldsymbol{t}^{\nu}$ и $\boldsymbol{v}^{\nu}$. В B-равновесии задача (4.3) разрешима, следовательно ее решения являются седловой точкой функции Лагранжа

$$L_{\nu} = \boldsymbol{p}_B A^{\nu} \boldsymbol{x}^{\nu} - \boldsymbol{p}_B B^{\nu} \boldsymbol{v}^{\nu} + \boldsymbol{l}^{\nu}\left(\boldsymbol{z}^{\nu} - \boldsymbol{x}^{\nu} + \boldsymbol{v}^{\nu} - \boldsymbol{t}^{\nu}\right) + \theta^{\nu} \boldsymbol{q}_B \boldsymbol{t}^{\nu}, \tag{4.6}$$

где $\boldsymbol{l}^{\nu}, \theta^{\nu} \ge 0$ – двойственные переменные к ограничениям (4.2), (4.1) соответственно. Поскольку $\boldsymbol{t}^{\nu}$ может иметь любой знак, $\boldsymbol{l}^{\nu} = \theta^{\nu} \boldsymbol{q}_B$, и из условий дополняющей нежесткости получаем

$$\inf_{r^\nu,\theta^\nu\ge 0}\ \sup_{x^\nu,v^\nu\ge 0;t^\nu;z^\nu\in T^\nu} L_\nu = \min_{\theta^\nu:p_B A^\nu\le\theta^\nu q_B\le p_B B^\nu}\left[\theta^\nu \max_{z^\nu\in T^\nu} \boldsymbol{q}_B \boldsymbol{z}^\nu\right]. \tag{4.7}$$

Отсюда следует, во-первых, что В-равновесие эффективно, поскольку $\boldsymbol{z}_B^\nu \in \operatorname{Argmax}_{z^\nu\in T^\nu} \boldsymbol{q}_B \boldsymbol{z}^\nu$ (см. (2.11) – все производители максимизируют чистый выпуск в одних и тех же ценах $\boldsymbol{q}$. Во-вторых, поскольку в силу (2.1) $\max_{z^\nu\in T^\nu} \boldsymbol{q}_B \boldsymbol{z}^\nu \ge 0$, для $è^{í}$ в седловой точке можно взять значение

$$\theta_B^\nu = \max_{i:p_B^i\ne 0} \frac{p_B^i a_i^\nu}{q_B^i} > 0, \tag{4.8}$$

причем должно выполняться неравенство

$$\theta^\nu \boldsymbol{q}_B \le \boldsymbol{p}_B B^\nu. \tag{4.9}$$

Докажем теперь существование В-равновесия. Зафиксируем набор положительных чисел $\alpha = \left\langle \alpha^1,...,\alpha^N \right\rangle > 0$ и рассмотрим задачу выпуклого программиров+ания,

$$\sum_\nu \alpha^\nu \left(\boldsymbol{p}A^\nu \boldsymbol{x}^\nu - \boldsymbol{p}B^\nu \boldsymbol{v}^\nu\right) \to \max_{x^\nu,t^\nu,v^\nu,z^\nu,} \tag{4.10}$$

при индивидуальных технологических ограничениях (4.2), ограничении баланса на бартерном рынке (4.4) и вспомогательном ограничении

$$\sum_\nu \boldsymbol{v}^\nu \le \boldsymbol{m}, \tag{4.11}$$

Ограничение (4.11) делает допустимую область задачи (4.10)-(4.11) компактной. Действительно, из (4.11) $\boldsymbol{v}^\nu \le \boldsymbol{m}$ и тогда из (4.2) $\sum_\nu \left(\boldsymbol{x}^\nu + \boldsymbol{t}^\nu\right) \le 2\boldsymbol{m}$. Отсюда, в силу (4.4), $\sum_\nu \boldsymbol{x}^\nu \le 2\boldsymbol{m}$, а значит $\boldsymbol{x}^\nu \le \boldsymbol{m}$. Но тогда из (4.2) $\boldsymbol{t}^\nu \le 2\boldsymbol{m}$, а из (4.4) $-\boldsymbol{t}^\nu \le \sum_{\mu\ne\nu} \boldsymbol{t}^\mu \le 2N\boldsymbol{m}$. Кроме того, задача (4.10), (4.11) удовлетворяет условию Слейтера. (В качестве допустимого решения можно взять $v_{i_\nu}^\nu = 0$, $v_i^\nu = -2m_i^\nu / 3N$, $i \ne i_\nu$; $z_{i_\nu}^\nu = f^\nu(\boldsymbol{m}/3N)$, $z_i^\nu = -m_i^\nu / 3N$, $i \ne i_\nu$; $x_{i_\nu}^\nu = t_{i_\nu}^\nu = z_{i_\nu}^\nu / 3$, $x_i^\nu = t_i^\nu = 0$, $i \ne i_\nu$.)

Рассмотрим функцию Лагранжа задачи (4.10)-(4.11)

$$L = \sum_\nu \left[\alpha^\nu\left(\boldsymbol{p}A^\nu \boldsymbol{x}^\nu - \boldsymbol{p}B^\nu \boldsymbol{v}^\nu\right) + \boldsymbol{h}^\nu\left(\boldsymbol{z}^\nu - \boldsymbol{x}^\nu + \boldsymbol{v}^\nu - \boldsymbol{t}^\nu\right) + \boldsymbol{g}\boldsymbol{t}^\nu - \boldsymbol{f}\boldsymbol{v}^\nu\right] + \boldsymbol{f}\boldsymbol{m} \tag{4.12}$$

где $\boldsymbol{h}^{\nu}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{f} \geq \boldsymbol{0}$, – множители Лагранжа при ограничениях (4.2), (4.4) и (4.11), соответственно. Обозначим через $\boldsymbol{h}_B^{\nu}, \boldsymbol{g}_B, \boldsymbol{f}_B$ их значения в седловой точке (4.12), а через $\boldsymbol{x}_B^{\nu}, \boldsymbol{v}_B^{\nu}, \boldsymbol{t}_B^{\nu}, \boldsymbol{z}_B^{\nu}$ - решение задачи (4.10)-(4.11). Поскольку $\boldsymbol{t}^{\nu}$ может иметь любой знак, $\boldsymbol{h}_B^{\nu} = \boldsymbol{g}_B$ для всех ν, и из условий дополняющей нежесткости получаем

$$\boldsymbol{p}A^{\nu}\boldsymbol{x}_B^{\nu} = \boldsymbol{g}_B\boldsymbol{x}_B^{\nu},\ \boldsymbol{p}B^{\nu}\boldsymbol{v}_B^{\nu} = \boldsymbol{g}_B\boldsymbol{v}_B^{\nu},\ \boldsymbol{g}_B\left(\boldsymbol{x}_B^{\nu} - \boldsymbol{v}_B^{\nu}\right) = \boldsymbol{g}_B\left(\boldsymbol{z}_B^{\nu} - \boldsymbol{t}_B^{\nu}\right),\ \boldsymbol{g}_B\sum\nolimits_{\nu}\boldsymbol{t}_B^{\nu} = 0, \quad (4.13)$$

$$\inf_{\boldsymbol{h}^{\nu},\boldsymbol{g},\boldsymbol{f}\geq 0}\ \sup_{\substack{\boldsymbol{x}^{\nu},\boldsymbol{v}^{\nu}\geq 0,\\ \boldsymbol{t}^{\nu},\boldsymbol{z}^{\nu}\in T^{\nu}}} L = \boldsymbol{f}_B\boldsymbol{m} + \min_{\alpha_{\nu}\boldsymbol{p}_B A^{\nu}\leq \boldsymbol{g}}\ \max_{\boldsymbol{z}^{\nu}\in\mathbf{T}^{\nu}} \boldsymbol{g}\sum\nolimits_{\nu}\boldsymbol{z}^{\nu}, \quad (4.14)$$

причем

$$f_B^i = \max_{\nu}\left\{\left[g_B^i - \alpha^{\nu}p^i b_i^{\nu}\right]_+\right\} \quad (4.15)$$

Составим из множества решений задачи (4.10),(4.11) функцию совокупного предложения $\mathrm{S}(\boldsymbol{p}) = \left\{\sum\nolimits_{\nu}\left(\boldsymbol{x}_B^{\nu} - \boldsymbol{v}_B^{\nu}\right)\right\}$. Из (4.13), (4.14) следует, что $\boldsymbol{p}\sum\nolimits_{\nu}\left(\boldsymbol{x}_B^{\nu} - \boldsymbol{v}_B^{\nu}\right) \geq \sum\nolimits_{\nu}\left(\boldsymbol{p}A^{\nu}\boldsymbol{x}_B^{\nu} - \boldsymbol{p}B^{\nu}\boldsymbol{v}_B^{\nu}\right) = \boldsymbol{g}_B\sum\nolimits_{\nu}\left(\boldsymbol{x}_B^{\nu} - \boldsymbol{v}_B^{\nu}\right) = \boldsymbol{g}_B\sum\nolimits_{\nu}\boldsymbol{z}_B^{\nu} =$ $\max_{\boldsymbol{z}^{\nu}\in\mathbf{T}^{\nu}}\boldsymbol{g}_B\sum\nolimits_{\nu}\boldsymbol{z}^{\nu}$, В силу ограничений на двойственные переменные $\boldsymbol{g}_B \in \mathbf{R}_{++}^n$, так что по лемме 1, $\max_{\boldsymbol{z}^{\nu}\in\mathbf{T}^{\nu}}\boldsymbol{g}\sum\nolimits_{\nu}\boldsymbol{z}^{\nu} > 0$ и, следовательно, $\boldsymbol{p}\mathrm{S}(\boldsymbol{p}) > 0$. Таким образом, S удовлетворяет условиям леммы 2 и поэтому существуют равновесные цены $\boldsymbol{p}_B$, рациональное потребление $\boldsymbol{c}_B \geq \boldsymbol{0}$, и доход $\psi_B = \boldsymbol{p}_B\boldsymbol{c}_B$, удовлетворяющие балансу (2.9) и закону Вальраса (2.10).

Из баланса (2.9) следует, что при равновесных ценах $\boldsymbol{p}_B$ $\sum\nolimits_{\nu}\boldsymbol{z}_B^{\nu} \geq \boldsymbol{0}$. Отсюда, с одной стороны, вытекает, что в (4.14) можно взять $\boldsymbol{g}_B$ равным его нижней границе, а с другой, в силу леммы 1 – что этот вектор $\boldsymbol{g}_B$ будет положительным. Значит и $\boldsymbol{p}_B$ положительно.

$$g_B^i = \xi_i(\alpha)p_B^i, \qquad \xi_i = \max_{\nu}\left\{\alpha^{\nu}a_1^{\nu}\right\} > 0, \qquad \boldsymbol{p}_B > \boldsymbol{0},. \quad (4.16)$$

Осталось выбрать бартерные цены $\boldsymbol{q}_B$ и параметры $\alpha > 0$ так, чтобы равновесные значения $\boldsymbol{x}_B^{\nu}, \boldsymbol{v}_B^{\nu}, \boldsymbol{t}_B^{\nu}, \boldsymbol{z}_B^{\nu}$ были решениями индивидуальных задач (4.3). Сравнивая функции Лагранжа (4.6) и (4.12), легко заметить, что решения индивидуальных задач (4.3) и решение глобальной задачи (4.10) совпадут, если

$$\frac{1}{\alpha^{\nu}} \boldsymbol{g}_B = \theta_B^{\nu} \boldsymbol{q}_B, \qquad \theta_B^{\nu} = \max_{i: p_B^i \neq 0} \frac{p_B^i a_i^{\nu}}{q_B^i} \tag{4.17}$$

и при этом окажется, что $\boldsymbol{f}_B = 0$, Заметим, что в силу (4.15), (4.17) равенство $\boldsymbol{f}_B = 0$ эквивалентно условиям разрешимости индивидуальных задач (4.9).

Поскольку $\boldsymbol{p}_B > \boldsymbol{0}$ при любых $\alpha > 0$, условиям (4.17) можно удовлетворить независимо[7] от $\boldsymbol{p}_B$. Из первого соотношения (4.17) заключаем, что $\alpha^{\nu}\theta_B^{\nu} = \lambda$, $\lambda \boldsymbol{q}_B = \boldsymbol{g}_B$ при некотором $\lambda > 0$ и затем из второго, учитывая (4.16) и неравенство $\boldsymbol{p}_B > \boldsymbol{0}$, получаем что

$$\alpha^{\nu} = \min_i \frac{\xi_i}{a_i^{\nu}}, \qquad \xi_i = \max_{\nu} \min_k \frac{a_i^{\nu} \xi_k}{a_k^{\nu}}$$

Этой системе уравнений удовлетворяют

$$\xi_i = \max_{\nu} a_i^{\nu} = a_i^*, \qquad \alpha^{\nu} = \min_i \frac{a_i^*}{a_i^{\nu}}. \tag{4.18}$$

Действительно, поскольку $a_k^* / a_k^{\nu} \geq 1$, $\max_{\nu} \min_k \{a_i^{\nu} a_k^* / a_k^{\nu}\} \geq \max_{\nu} a_i^{\nu} = a_i^*$, а поскольку $\min_k \{a_k^* / a_k^{\nu}\} \leq a_i^* / a_i^{\nu}$, $\max_{\nu} \min_k \{a_i^{\nu} a_i^* / a_k^{\nu}\} \leq a_i^*$

Проверим, что при ξ_i, α^{ν} вида (4.18) $\boldsymbol{f}_B = 0$ или в силу (4.17), (4.15), что $\xi_i \leq \alpha^{\nu} b_i^{\nu}$. Действительно, это неравенство эквивалентно неравенству $\max_k \{a_k^{\nu} / a_k^*\} \leq b_i^{\nu} / a_i^{\nu}$, которое выполняется, поскольку из (3.2), (4.5) следует, что его правая часть не меньше, а левая – не больше, чем *1*.

Последнее утверждение теоремы следует из второго соотношения (4.13), поскольку при $a_i^* < b_i^{\nu}$ и $\boldsymbol{p}_B > \boldsymbol{0}$ $g_B^i = a_i^* p_B^i < b_i^{\nu} p_B^i$.

Все трудности в приведенном выше доказательстве связаны с возможной разницей транзакционных издержек у разных фирм. Квазиденьги вследствие этого имеют для них различную "цену" θ_B^{ν}, и в модели фактически получается неполный рынок – фирмам не хватает возможности продавать друг другу право эмиссии квазиденег, а бартерные обмены в равновесии отчасти используются совокупностью фирм как средство направить реализацию продуктов по наиболее выгодным каналам

[7] Попытка обойтись без требования положительности цен и искать $\boldsymbol{p}_B$ и α одновременно каким-либо итерационным процессом не проходит из-за того, что зависимость θ^{ν} от $\boldsymbol{p}$ на симплексе цен разрывна. Без какого-то условия, обеспечивающего положительность цен рассматриваемый способ доказательства не годится.

обмена.[8] Если предположить, что на денежном рынке все фирмы находятся в равных условиях, можно обойтись без условия неразложимости экономики.

Теорема 5. Если экономика продуктивна и $A^{\nu} = A$, $\nu = 1,...,N$, то существует B-равновесие с $\boldsymbol{q}_B = \lambda \boldsymbol{p}_B A$, $\lambda > 0$. В этом равновесии величины $\boldsymbol{x}_B^{\nu}, \boldsymbol{v}_B^{\nu}, \boldsymbol{t}_B^{\nu}, \boldsymbol{z}_B^{\nu}$ доставляют максимум суммарной эффективной прибыли фирм $\sum_{\nu} \left(\boldsymbol{p}_B A \boldsymbol{x}^{\nu} - \boldsymbol{p}_B B^{\nu} \boldsymbol{v}^{\nu} \right)$ при индивидуальных технологических ограничениях (4.2), ограничении баланса на бартерном рынке (4.4).

Доказательство можно провести также как в теореме 4, но сразу положив $\alpha^{\nu} = 1$, что соответствует максимизации суммарной эффективной прибыли. Тогда в (4.16) $\xi_i = a_i$ и из (4.17) $\theta_B^{\nu} = 1/\lambda$ независимо от того, есть ли у $\boldsymbol{p}_B$ нулевые компоненты.

В рассмотренном случае квазиденьги действительно являются параллельным средством обращения – их двойственные оценки θ_B^{ν} одинаковы для всех фирм и следовательно обменивать их на деньги нет смысла.

Отметим еще, что если матрица транзакционных издержек A пропорциональна единичной, пропорции рыночных и бартерных цен совпадают, а значит производство и конечное потребление в B-равновесии будет таким же как в C-равновесии. Таким образом теоретически бартер полностью компенсирует искажающее действие, например, единого налога с продаж (если сам он этим налогом не облагается)

Эффективность бартерного равновесия наводит на мысль, что разумно институционализированный бартер может решить проблему неэффективности равновесия. Однако более внимательный анализ показывает, что даже рассматриваемый здесь идеальный механизм бартерного обмена обладает существенными дефектами. В B-равновесии все сырье приобретается по бартеру[9], но положительную денежную прибыль получают и те фирмы, которые не производят продуктов конечного потребления. Значит эти фирмы должны выменивать по бартеру продукты, которые можно продать за деньги конечным потребителям. Таким образом, бартер фактически сводится к натуральным деньгам (commodity money) со всеми присущими последним недостатками, вызванными неустойчивостью спроса на каждый конкретный продукт и несоответствием производства этого продукта общему развитию экономики. Напомним, что эти недостатки

[8] Для того, чтобы полностью использовать наиболее выгодные каналы обмена, фирмам следовало бы объединить свои финансы. Эта возможность исследуется в разделе 6.

[9] Этот результат не выглядит чрезмерной идеализацией. Статистические данные показывают, что в 1997г. в обрабатывающих отраслях 60-80% продаж оплачивалось бартером.

привели в начале XXв. к полному вытеснению натуральных денег (золота). кредитными деньгами.

Недостатком бартера является также независимость масштабов денежных и бартерных цен, которая при серьезной институционализации требует удвоения системы учета.

5 Общее равновесие с неплатежами (A-равновесие)

Если конкурентное равновесие изучено глубоко, а бартерные обмены, по крайней мере, понятно как описывать, то с формальным анализом неплатежей ясности гораздо меньше. При построении математической модели неплатежей возникает следующая трудность. Совсем несложно объяснить, почему предприятие, покупающее продукцию, не может (или не хочет) платить за нее полную цену. Непонятно, почему предприятие, продающее продукцию, согласно получать за нее меньшую цену. Нам известно несколько подходов к решению данной проблемы. Подход, представленный в [21], сводит дело к неконкурентности среды. Если продавец является монополистом, то он заинтересован в ценовой дискриминации, которая в большинстве случае запрещена законом. Неплатежи дают отличную возможность продавать товар различным покупателям по разным ценам. В [21] поставлена и решена задача о равновесии на рынке данного товара и в случае, если продавец не имеет полной информации о покупателе и может использовать неплатежи для получения большей информации. Среди недостатков подхода отметим экзогенный параметр, при помощи которого автор задает опасность иметь слишком большую задолженность (вероятность быть подвергнутым процедуре банкротства).

Другой подход [17,22] предполагает наличие у предприятий некоторого корпоративного духа. Предприятия действуют вместе, используя институт неплатежей как инструмент давления на государство с целью получения льготных кредитов. В этом случае каждый конкретный продавец сталкивается с “дилеммой заключенного”: с одной стороны, отпускать товар по заниженной цене невыгодно, с другой стороны, если так будут поступать все предприятия, все они окажутся в выигрыше. При наличии корпоративного духа предприятия выбирают Парето-оптимальное поведение. К данному подходу тесно примыкают и модели общего равновесия [23-24], где уровень неплатежей является гибкой переменной (типа цены). Все предприятия принимают решения исходя из заданного уровня неплатежей, который затем определяется из условий равновесия. В данном разделе мы исследуем модель, в которой неплатежи рассматриваются как разновидность взаимного кредита производителей. Эта модель сходна с работами [23-24] однако мы допускаем различные уровни неплатежей для различных продуктов (что действительно имеет место [3]). Наш подход не исключает представления о корпоративном поведении, но исключает возможность ценовой дискриминации.

Предположим, что каждый производитель может реализовывать свою продукцию по двум каналам. Первый канал соответствует рассматривавшемуся выше рынку, где присутствуют конечные потребители и где продукты покупаются и продаются по ценам $\boldsymbol{p}$. Второй канал служит только для обменов между производителями (межфирменный рынок) и может интерпретироваться как система традиционных, унаследованных с советских времен прямых связей между производителями. При реализации продукции по этому каналу допускаются и даже предполагаются неплатежи. Объемы поставок и покупок по ν-го производителя по традиционным связям мы обозначаем через $\boldsymbol{y}^{\nu}$ и $\boldsymbol{u}^{\nu}$. Соответственно технологическое ограничение на деятельность производителя принимает вид

$$\boldsymbol{x}^{\nu} + \boldsymbol{y}^{\nu} - \boldsymbol{v}^{\nu} - \boldsymbol{u}^{\nu} \le \boldsymbol{z}^{\nu},\ \boldsymbol{x}^{\nu}, \boldsymbol{y}^{\nu}, \boldsymbol{v}^{\nu}, \boldsymbol{u}^{\nu} \ge \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{z}^{\nu} \in T^{\nu} \tag{5.1}$$

Здесь через $\boldsymbol{x}^{\nu}, \boldsymbol{v}^{\nu}$ $\boldsymbol{z}^{\nu}$, как и прежде, обозначены продажи и покупки по рыночному каналу и вектор выпусков/затрат.

Наша основная гипотеза состоит в том, что на межфирменном рынке устанавливаются "нормы недоплат" $\boldsymbol{s} = \left\langle s^1, ..., s^n \right\rangle$, возможно, различные для разных продуктов, но одинаковые для всех производителей. При реализации единицы продукта i по второму каналу продавец получает деньгами только $p^i - s^i$ рублей. Оставшиеся s^i рублей представляют собой неплатежи и учитываются в виде прироста дебиторской задолженности продавца и кредиторской – покупателя. Естественно предположить $0 \le s^i \le p^i$.

Мы предполагаем, что каждое предприятие может выбирать, сколько и по какому каналу покупать и продавать, считая цены $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{p} - \boldsymbol{s}$ заданными. Тогда возникает вопрос – зачем продавать продукцию по более низким ценам? Возможный ответ – чтобы *покупать сырье* по более низким ценам. Мы считаем, что предприятие терпит неплатежи в своем активе, чтобы оправдать неплатежи в пассиве, возникающие вследствие покупок по ценам $\boldsymbol{p} - \boldsymbol{s}$. Иными словами, предприятие оправдается за то, что оно не полностью оплатило покупку тем, что и ему тоже не заплатили за поставку. В стационарном состоянии это требование формально можно выразить в виде *ограничения кредитоспособности*.

$$\boldsymbol{s}\boldsymbol{y}^{\nu} \ge \boldsymbol{s}\boldsymbol{u}^{\nu} \tag{5.2}$$

Имеющиеся в нашем распоряжении статистические данные показывают, что, по крайней мере до середины 1997г. условие (5.2) было выполнено для большинства предприятий, а не только для предприятий ТЭК, как часто пишут[10].

[10] При проверке условия (5.2) надо учитывать только задолженность потребителям и задолженность поставщиков. По всей сумме дебиторской и кредиторской задолженности, которые включают задолженность по расчетам с государством и персоналом предприятие может быть чистым должником.

Предполагая, что факторы, приводящие к разнице покупных и продажных цен (см. начало раздела 3), одинаково действуют на денежные транзакции по обоим каналам обмена, приходим к следующей задаче, описывающей в рамках модели поведение производителя при наличии неплатежей:

$$\boldsymbol{p}A^{\nu}\boldsymbol{x}^{\nu}+(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{s})A^{\nu}\boldsymbol{y}^{\nu}-\boldsymbol{p}B^{\nu}\boldsymbol{v}^{\nu}-(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{s})B^{\nu}\boldsymbol{u}^{\nu}\to\max_{\boldsymbol{x}^{\nu},\boldsymbol{y}^{\nu},\boldsymbol{v}^{\nu},\boldsymbol{u}^{\nu},\boldsymbol{z}^{\nu}}, \tag{5.3}$$

при технологических ограничениях (5.1), и ограничении кредитоспособности (5.2).

<u>Определение 8</u>. Состояние экономики $\boldsymbol{p}_A$, $\boldsymbol{c}_A$, ψ_A, $\boldsymbol{x}_A^{\nu}$, $\boldsymbol{v}_A^{\nu}$, $\boldsymbol{z}_A^{\nu}$, будем называть *А-равновесием*[11], если существуют нормы недоплат $\boldsymbol{s}_A$, $\boldsymbol{0}\le\boldsymbol{s}_A\le\boldsymbol{p}_A$, а также поставки и покупки по традиционным связям $\boldsymbol{y}_A^{\nu},\boldsymbol{u}_A^{\nu}$ такие что $\boldsymbol{p}_A\in\mathbf{R}_{++}^{n}$; $\boldsymbol{x}_A^{\nu}$, $\boldsymbol{v}_A^{\nu},\boldsymbol{y}_A^{\nu},\boldsymbol{u}_A^{\nu}$, $\boldsymbol{z}_A^{\nu}$ являются решениями задачи (5.3) при ограничениях (5.1), (5.2); совокупные покупки по традиционным связям не превосходят совокупных продаж

$$\sum\nolimits_{\nu}\boldsymbol{y}_A^{\nu}\ge\sum\nolimits_{\nu}\boldsymbol{v}_A^{\nu}; \tag{5.4}$$

совокупная выручка поставщиков по традиционным связям равна совокупным затратам потребителей

$$\sum\nolimits_{\nu}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{s})\boldsymbol{y}_A^{\nu}=\sum\nolimits_{\nu}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{s})\boldsymbol{u}_A^{\nu} \tag{5.5}$$

Рассмотренное в разделе 2 ВА-равновесие можно отождествить с частным случаем А-равновесия. Для этого достаточно положить $\boldsymbol{s}_A=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{y}_A^{\nu}=\boldsymbol{u}_A^{\nu}=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{p}_A=\boldsymbol{p}_{BA}$ $\boldsymbol{c}_A=\boldsymbol{c}_{BA}$, $\psi_A=\psi_{BA}$, $\boldsymbol{x}_A^{\nu}=\boldsymbol{x}_{BA}^{\nu}$, $\boldsymbol{v}_A^{\nu}=\boldsymbol{v}_{BA}^{\nu}$, $\boldsymbol{z}_A^{\nu}=\boldsymbol{z}_{BA}^{\nu}$. Если в В-равновесии пропорции рыночных и бартерных цен совпадают[12] – $\boldsymbol{q}_B=\lambda\boldsymbol{p}_B$, то такое В-равновесие можно также отождествить с частным случаем А-равновесия: $\boldsymbol{s}_A=\boldsymbol{p}_B$, $\boldsymbol{y}_A^{\nu}=\left[\boldsymbol{t}_B^{\nu}\right]_+$, $\boldsymbol{u}_A^{\nu}=\left[\boldsymbol{t}_B^{\nu}\right]_-$, $\boldsymbol{p}_A=\boldsymbol{p}_B$ $\boldsymbol{c}_A=\boldsymbol{c}_B$, $\psi_A=\psi_B$, $\boldsymbol{x}_A^{\nu}=\boldsymbol{x}_B^{\nu}$, $\boldsymbol{v}_A^{\nu}=\boldsymbol{v}_B^{\nu}$, $\boldsymbol{z}_A^{\nu}=\boldsymbol{z}_B^{\nu}$. Существенно однако, что кроме этих крайних случаев может существовать еще целая “линия” (одномерный континуум) не совпадающих по натуральным показателям А-равновесий.

<u>Теорема 6</u>. Пусть экономика продуктивна (2.4), и неразложима (2.5), а набор матриц $\left\langle A^{\nu},B^{\nu}\right\rangle$ прибыльный, (3.4), тогда для любого $\chi\in(0,1]$

[11] От английского arrears –неоплаченные счета, недоимки.
[12] Существование такого В-равновесия можно гарантировать, только если матрица (4.5) пропорциональна единичной. Если такое В-равновесие существует, оно по натуральным показателям совпадает с С-равновесием (см. раздел 3).

существует А-равновесие, в котором $\boldsymbol{p}_A > 0$ и $\boldsymbol{s}_A = \chi \boldsymbol{p}_A G$, где $G = \mathrm{diag}\langle g^1,...,g^n \rangle$, $g_i \ge 0$, $\sum_i g_i = 1$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $\mathbf{G}^n$ – множество неотрицательных диагональных матриц с единичным следом. Зафиксируем $\chi \in (0,1]$, положим $\boldsymbol{s} = \chi \boldsymbol{p} G$, $G \in \mathbf{G}^n$ и рассмотрим задачу (5.3) при ограничениях (5.1), (5.2) и вспомогательных ограничениях

$$\boldsymbol{u}^\nu + \boldsymbol{v}^\nu \le 2N\boldsymbol{m}; \quad \boldsymbol{z}^\nu \ge -3N\boldsymbol{m}; \tag{5.6}$$

которые делают допустимую область задачи компактной.

Определим точечно-множественное отображение $\mathrm{S}: \ \mathbf{P}^n \times \mathbf{G}^n \to 2^{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^1}$ так, что $\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{e}, \pi \rangle \in \mathrm{S}(\boldsymbol{p}, G)$ если

$$\boldsymbol{w} = \sum_\nu \left(\boldsymbol{x}^\nu - \boldsymbol{v}^\nu + \boldsymbol{y}^\nu - \boldsymbol{u}^\nu \right), \ e = \sum_\nu \left(\boldsymbol{y}^\nu - \boldsymbol{u}^\nu \right), \tag{5.7}$$

$$\pi = \sum_\nu \left(\boldsymbol{p}\left(\boldsymbol{x}^\nu - \boldsymbol{v}^\nu \right) + (\boldsymbol{p} - \chi \boldsymbol{p} G)\left(\boldsymbol{y}^\nu - \boldsymbol{u}^\nu \right) \right), \tag{5.8}$$

где $\boldsymbol{x}^\nu, \boldsymbol{y}^\nu, \boldsymbol{v}^\nu, \boldsymbol{u}^\nu, \boldsymbol{z}^\nu$, $\nu = 1,...,N$ – некоторые решения задач (5.3), (5.1), (5.2), (5.6). Как показано в лемме 4 (см. Приложение) отображение S имеет непустые компактные выпуклые образы и замкнутый график (см. [25]).

Лемма 4 также показывает, что задача (5.3), (5.1), (5.2), (5.6) удовлетворяет условию Слейтера для ограничений (5.1), (5.2). Из условий дополняющей нежесткости и теоремы о седловой точке получаем, что решению $\boldsymbol{x}^\nu, \boldsymbol{y}^\nu, \boldsymbol{v}^\nu, \boldsymbol{u}^\nu, \boldsymbol{z}^\nu$ задачи (5.3), (5.1), (5.2), (5.6) соответствуют двойственные переменные к ограничениям $\boldsymbol{r}^\nu$, θ_A^ν, такие что

$$\boldsymbol{z}^\nu \in \operatorname*{Argmax}_{\boldsymbol{z} \in \mathrm{T}^\nu, \boldsymbol{z} \ge -3N\boldsymbol{m}} \boldsymbol{r}^\nu \boldsymbol{z}, \qquad \boldsymbol{r}^\nu \in \operatorname*{Argmin}_{\boldsymbol{r} \ge \boldsymbol{p} A^\nu} \boldsymbol{r}\left(\boldsymbol{z}^\nu + \boldsymbol{v}^\nu + \boldsymbol{u}^\nu \right), \tag{5.9}$$

$$\theta_A^\nu \ge 0, \qquad \boldsymbol{p} G \boldsymbol{y}^\nu - \boldsymbol{p} G \boldsymbol{u}^\nu \ge 0, \qquad \theta_A^\nu \left(\boldsymbol{p} G \boldsymbol{y}^\nu - \boldsymbol{p} G \boldsymbol{u}^\nu \right) = 0, \tag{5.10}$$

$$(\boldsymbol{p} - \chi \boldsymbol{p} G) A^\nu - \boldsymbol{r}^\nu + \theta_A^\nu \chi \boldsymbol{p} G \le \boldsymbol{0}, \ \boldsymbol{y}^\nu \ge 0, \ \left((\boldsymbol{p} - \chi \boldsymbol{p} G) A^\nu - \boldsymbol{r}^\nu + \theta_A^\nu \chi \boldsymbol{p} G \right) \boldsymbol{y}^\nu = \boldsymbol{0}, \tag{5.11}$$

Если $\theta_A^\nu > 0$, то из (5.10) следует, что $\boldsymbol{p} G \boldsymbol{y}^\nu - \boldsymbol{p} G \boldsymbol{u}^\nu = 0$. Если $\theta_A^\nu = 0$, то из ограничения на двойственные переменные $\boldsymbol{r}^\nu \ge \boldsymbol{p} A^\nu$ (см. (5.9)) и (5.11) следует, что $y_i^\nu = 0$ при $n_i > 0$, т.е. $\boldsymbol{p} G \boldsymbol{y}^\nu = 0$. Но тогда из (5.10) вытекает, что $\boldsymbol{p} G \boldsymbol{u}^\nu = 0$. Таким образом в любом случае $\boldsymbol{p} G \boldsymbol{y}^\nu - \boldsymbol{p} G \boldsymbol{u}^\nu = 0$ и из (5.7)

$$\boldsymbol{p}G\boldsymbol{e} = 0 \qquad \text{при } \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{e}, \pi \rangle \in \mathrm{S}(\boldsymbol{p}, G). \tag{5.12}$$

Поскольку $\boldsymbol{x}^{\nu} = [\boldsymbol{z}^{\nu}]_{+}$, $\boldsymbol{v}^{\nu} = [\boldsymbol{z}^{\nu}]_{-}$, $\boldsymbol{v}^{\nu} = [\boldsymbol{z}^{\nu}]_{-}$ – допустимое решение задачи (5.3), (5.1), (5.2), (5.6), для любого решения $\boldsymbol{x}^{\nu}, \boldsymbol{y}^{\nu}, \boldsymbol{v}^{\nu}, \boldsymbol{u}^{\nu}, \boldsymbol{z}^{\nu}$ задачи (5.3), (5.1), (5.2), (5.6) имеет место оценка $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}^{\nu} - \boldsymbol{v}^{\nu}) + (\boldsymbol{p} - \chi \boldsymbol{p}G)(\boldsymbol{y}^{\nu} - \boldsymbol{u}^{\nu}) \geq \max\limits_{0 \leq \boldsymbol{u} \leq \boldsymbol{m}} \left(a_{i_{\nu}}^{\nu} p_{i_{\nu}} f^{\nu}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{p}B^{\nu}\boldsymbol{u} \right)$. Отсюда в силу (2.4), (3.4) следует, что

$$\pi \geq \psi_{-} > 0 \qquad \text{при} \qquad \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{e}, \pi \rangle \in \mathrm{S}(\boldsymbol{p}, G),\ \boldsymbol{p} \in \mathbf{P}^{n},\ G \in \mathbf{G}^{n}. \tag{5.13}$$

Поскольку график S замкнут, существуют выпуклый компакт $\mathbf{K} \subset \mathbf{R}^{n}$ и отрезок $\mathbf{I} \subset \mathbf{R}_{++}^{1}$ такие, что S .

Как и в доказательстве Леммы 2 (см. Приложение), введем денежную массу ψ и определим на $\mathbf{P}^{n} \times \mathbf{I}$ функцию спроса $\mathrm{D}(\boldsymbol{p}, \psi)$ с компактными выпуклыми непустыми значениями и замкнутым графиком

$$\mathrm{D}(\boldsymbol{p}, \psi) = \operatorname*{Argmax}_{\boldsymbol{c}} \{\omega(c)\} \text{ при условиях } \mathbf{P}^{n} \times \mathbf{I} \text{ и } \boldsymbol{pc} \leq \psi. \tag{5.14}$$

Наконец, положив $G \in \mathbf{G}^{n}$, определим точечно-множественное отображение A компакта $\pi \geq \psi_{-} > 0$ в себя: $\langle \boldsymbol{e}_0', \boldsymbol{e}_1', \psi', \boldsymbol{p}', G' \rangle \in \mathrm{A}_{\chi}(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \psi, \mathbf{p}, \mathbf{n})$, если

$$\boldsymbol{e}_0' = \boldsymbol{w} - \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{e}_1' = \boldsymbol{e},\ \psi' = \pi;\ \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{e}, \pi \rangle \in \mathrm{S}(\boldsymbol{p}, G),\ \boldsymbol{c} \in \mathrm{D}(\boldsymbol{p}, \psi); \tag{5.15}$$

$$\mathbf{p}' \in \operatorname*{\mathit{Argmax}}_{\mathbf{p} \in \mathbf{P}^{n}} \mathbf{p}\mathbf{e}_0;\quad G' \in \operatorname*{\mathit{Argmax}}_{G \in \mathbf{G}^{n}} \mathbf{p}G\mathbf{e}_1 \tag{5.16}$$

Отображение A удовлетворяет условиям теоремы Какутани и, следовательно, имеет неподвижную точку $\langle \boldsymbol{e}_0^{\chi}, \boldsymbol{e}_1^{\chi}, \psi_{\chi}, \boldsymbol{p}_{\chi}, \boldsymbol{n}_{\chi} \rangle$, т.е.

$$\langle \boldsymbol{w}_{\chi}, \boldsymbol{e}_0^{\chi}, \psi_{\chi} \rangle \in \mathrm{S}(\boldsymbol{p}_{\chi}, \boldsymbol{n}_{\chi}); \tag{5.17}$$

$$\boldsymbol{e}_0^{\chi} = \boldsymbol{w}_{\chi} - \boldsymbol{c}_{\chi} = \sum\nolimits_{\nu} \left(\boldsymbol{x}_{\chi}^{\nu} - \boldsymbol{v}_{\chi}^{\nu} + \boldsymbol{y}_{\chi}^{\nu} - \boldsymbol{u}_{\chi}^{\nu} \right) - \boldsymbol{c}_{\chi}, \qquad \boldsymbol{c}_{\chi} \in \mathrm{D}(\boldsymbol{p}_{\chi}, \psi_{\chi}); \tag{5.18}$$

$$\boldsymbol{e}_1^{\chi} = \sum\nolimits_{\nu} \left(\boldsymbol{y}_{\chi}^{\nu} - \boldsymbol{u}_{\chi}^{\nu} \right) \qquad \boldsymbol{p}_{\chi} G \boldsymbol{e}_1^{\chi} \geq \boldsymbol{p}_{\chi} G_{\chi} \boldsymbol{e}_1^{\chi} = 0 \qquad \text{для всех} \qquad G \in \mathbf{G}^{n}; \tag{5.19}$$

$$\psi_{\chi} = \sum\nolimits_{\nu} \left(\boldsymbol{p}_{\chi} \left(\boldsymbol{x}_{\chi}^{\nu} - \boldsymbol{v}_{\chi}^{\nu} \right) + \left(\boldsymbol{p}_{\chi} - \chi \boldsymbol{n}_{\chi} \right) \left(\boldsymbol{y}_{\chi}^{\nu} - \boldsymbol{u}_{\chi}^{\nu} \right) \right) = \boldsymbol{p}_{\chi} \boldsymbol{w}_{\chi} - \chi \boldsymbol{n}_{\chi} \boldsymbol{e}_1^{\chi} \geq \psi_{-}, \tag{5.20}$$

$$\boldsymbol{p}\boldsymbol{e}_0^{\chi} \geq \boldsymbol{p}_{\chi} \boldsymbol{e}_0^{\chi} \qquad \text{для всех} \qquad \boldsymbol{p} \in \mathbf{P}^{n} \tag{5.21}$$

Напомним, что (5.17) означает, что $\boldsymbol{x}_{\chi}^{\nu}, \boldsymbol{y}_{\chi}^{\nu}, \boldsymbol{v}_{\chi}^{\nu}, \boldsymbol{u}_{\chi}^{\nu}, \boldsymbol{z}_{\chi}^{\nu}$ – некоторое решение задачи (5.3), (5.1), (5.2), (5.6) при $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_{\chi}$, $\boldsymbol{s} = \chi \boldsymbol{p}_{\chi} G_{\chi}$.

Покажем, как исходя из этой неподвижной точки получить А-равновесие. Положим $\boldsymbol{p}_A = \boldsymbol{p}_\chi$, $\boldsymbol{s}_A = \chi \boldsymbol{p}_\chi G_\chi$, $\psi_A = \psi_\chi$, $\boldsymbol{c}_A = \boldsymbol{c}_\chi$ $\boldsymbol{z}_A^\nu = \boldsymbol{z}_\chi^\nu$. По определению функции спроса (5.14) $\boldsymbol{p}_A \boldsymbol{c}_A \le \psi_A$, и в силу (5.20), (5.12), (5.18) $\boldsymbol{p}_A \boldsymbol{e}_0^\chi \ge 0$. Тогда из (5.21) следует, что $\boldsymbol{e}_0^\chi \ge \boldsymbol{0}$, или , учитывая (5.1),

$$\boldsymbol{c}_A \le \sum\nolimits_\nu \left(\boldsymbol{x}_\chi^\nu - \boldsymbol{v}_\chi^\nu + \boldsymbol{y}_\chi^\nu - \boldsymbol{u}_\chi^\nu \right) \le \sum\nolimits_\nu \boldsymbol{z}_A^\nu . \qquad (5.22)$$

Поскольку последний член этого неравенства не превосходит $\boldsymbol{m}$, значения $2m_i$ для компонент $\boldsymbol{c}_A$ невозможны, и из (5.14), ненасыщаемости спроса (2.7) и положительности дохода (5.20) следует, что

$$\boldsymbol{p}_A \boldsymbol{c}_A = \psi_A > 0, \qquad \boldsymbol{c}_A \in \operatorname*{Argmax}_{\boldsymbol{u} \in \mathbf{R}_+^n} \left\{ \omega(\boldsymbol{u}) \right\} \quad \text{при условии} \quad \boldsymbol{p}_A \boldsymbol{u} \le \psi_A \qquad (5.23)$$

Из (5.23) следует, что $\boldsymbol{c}_A \in \mathbf{R}_{++}^n$, поэтому в силу (5.22), (2.3) ограничение $\boldsymbol{z} \ge -3N\boldsymbol{m}$ в первом соотношении (5.9) можно отбросить и по Лемме 5 (см. Приложение) получить, что $\boldsymbol{p}_A > \boldsymbol{0}$. Если же $\boldsymbol{p}_A > \boldsymbol{0}$, то из (5.19) следует, что $\boldsymbol{e}_1^A \ge 0$, т.е. для $\boldsymbol{y}_\chi^\nu, \boldsymbol{u}_\chi^\nu$ выполнен баланс (5.4), причем неравенство может быть строгим только для тех компонент, для которых $g_\chi^i = 0$.

Если $g_\chi^i = 0$, то $s_A^i = 0$, и с точки зрения функционала (5.3) рыночный канал и традиционные связи оказываются равновыгодными. Поэтому при $s_A^i = 0$ не выходя за рамки решений индивидуальных задач и не нарушая материальных балансов, можно реализовать все обмены *i*-м продуктом по рыночному каналу. Кроме того, поскольку $\boldsymbol{p}_A \ge \boldsymbol{s}_A$, опять-таки, не уменьшая функционалов (5.3) и не нарушая балансов и индивидуальных ограничений (5.1), (5.2), (5.6), из векторов $\boldsymbol{x}_\chi^\nu, \boldsymbol{v}_\chi^\nu$ и $\boldsymbol{y}_\chi^\nu, \boldsymbol{u}_\chi^\nu$, соответственно, можно вычесть общие положительные составляющие. Итак, можно положить $x_{Ai}^\nu = \left[x_{\bullet i}^\nu - v_{\bullet i}^\nu \right]_+$, $v_{Ai}^\nu = \left[x_{\bullet i}^\nu - v_{\bullet i}^\nu \right]_-$, $y_{Ai}^\nu = \left[y_{\bullet i}^\nu - u_{\bullet i}^\nu \right]_+$, $u_{Ai}^\nu = \left[y_{\bullet i}^\nu - u_{\bullet i}^\nu \right]_-$ при $s_A^i > 0$ и $x_{Ai}^\nu = \left[x_{\bullet i}^\nu - v_{\bullet i}^\nu + y_{\bullet i}^\nu - u_{\bullet i}^\nu \right]_+$, $v_{Ai}^\nu = \left[x_{\bullet i}^\nu - v_{\bullet i}^\nu + y_{\bullet i}^\nu - u_{\bullet i}^\nu \right]_-$, $y_{Ai}^\nu = u_{Ai}^\nu = 0$ при $s_A^i = 0$.

Тогда, как было показано, $\sum\nolimits_\nu \boldsymbol{y}_A^\nu = \sum\nolimits_\nu \boldsymbol{u}_A^\nu$. Отсюда следует, что для переопределенных потоков выполнен финансовый баланс (5.5), материальный баланс (5.22) приобретает стандартный вид (2.9), а из (5.5), (5.20), (5.23) следует, что выполнен закон Вальраса в обычной форме (2.10).

Поскольку неотрицательные векторы $\boldsymbol{x}_A^\nu$ и $\boldsymbol{v}_A^\nu$, а также $\boldsymbol{y}_A^\nu$ и $\boldsymbol{u}_A^\nu$ – дизъюнктны, из (5.1) следует, что $\boldsymbol{x}_A^\nu, \boldsymbol{y}_A^\nu \le \boldsymbol{m}$. Тогда, в силу балансов, вспомогательные ограничения (5.6) неэффективны, и найденные потоки являются решением исходных индивидуальных задач (5.3), (5.1), (5.2). Теорема доказана

Чтобы показать, что в общем случае А-равновесия при разных значениях χ не совпадают по натуральным показателям, достаточно рассмотреть конкретный пример.

Рассмотрим экономику с двумя продуктами и двумя производителями, первый из которых производит продукт 1, используя продукт 2, а второй – продукт 2, используя продукт 1. Технологические множества задаются монотонными вогнутыми производственными функциями: $\mathbf{T}^1 = \{\mathbf{z} : z_2 \le 0 \le z_1 \le f^1(-z_2)\}$, $\mathbf{T}^2 = \{\mathbf{z} : z_1 \le 0 \le z_2 \le f^2(-z_1)\}$, где $f^\nu(w) = \sqrt{2\gamma^\nu w}$. Для определенности положим $\gamma^1 \ge \gamma^2$. Кроме того, заданы некоторые матрицы A^ν и B^ν. Для выбранных производственных функций любые наборы матриц вида (3.2) прибыльны (см. (3.4)) и существенными оказываются только отношения: $\beta^1 = b^1_{22}/a^1_{11} \ge 1$ и $\beta^2 = b^2_{11}/a^2_{22} \ge 1$.

Чтобы продемонстрировать тот факт, что пропорции недоплат $\boldsymbol{s}$ могут различаться в разных А-равновесиях, мы выберем такую функцию полезности потребления $\omega(c_1,c_2)$, при которой пропорции рыночных цен заведомо одинаковы в любом равновесии. Такой функцией, является, например, линейная: $\omega(c_1,c_2) = c_1+c_2$ при $c_1,c_2 \ge 0$. Тогда в любом из определенных выше равновесий рыночные цены на оба товара будут равны $p^1=p^2=1/2$.

Задача, которую первый производитель решает в А-равновесии, сводится к задаче $p^1\sqrt{2\gamma^1 w} - \left(p^2\beta^1 - s^2(\beta^1-1)\right)w \to \max\limits_{w\ge 0}$. Ее решение $w = w^1 = 0.5\gamma^1(p^1)^2 / \left(p^2\beta^1 - s^2(\beta^1-1)\right)^2$ определяет выпуск $z^1_1 = \sqrt{2\gamma^1 w^1}$, затраты и спрос на межфирменном рынке $u^1_2 = -z^1_2 = w^1$, а также предложение $y^1_1 = s^2 u^1_2 / s^1$ на межфирменном и $x^1_1 = z^1_1 - y^1_1$ на денежном рынках. Аналогичная задача для второго производителя дает $w = w^2 = 0.5\gamma^2(p^2)^2 / \left(p^1\beta^2 - s^1(\beta^2-1)\right)^2$, $z^2_2 = \sqrt{2\gamma^2 w^2}$, $u^2_1 = -z^2_1 = w^2$, $y^2_2 = s^1 u^2_1 / s^2$ и $x^2_2 = z^2_2 - y^2_2$. Равновесные рыночные цены нам уже известны $p^1=p^2=1/2$. Осталось найти равновесные значения недоплат s^1,s^2. При $p^1=p^2=1/2$ четыре условия материального баланса (2.9) и (5.4) удовлетворяются тогда и только тогда, когда $u^1_2 = y^2_2$ и $u^2_1 = y^1_2$. Легко проверить, что эти два уравнения эквивалентны условию $s^1 u^2_1 = s^2 u^1_2$. Таким образом, имеется только одно соотношение для определения двух цен s^1,s^2:

$$\frac{s_1}{\left(0.5\beta^2 - (\beta^2-1)s_1\right)^2} = \frac{s_2}{\left(0.5\beta^1 - (\beta^1-1)s_2\right)^2}\,. \tag{5.24}$$

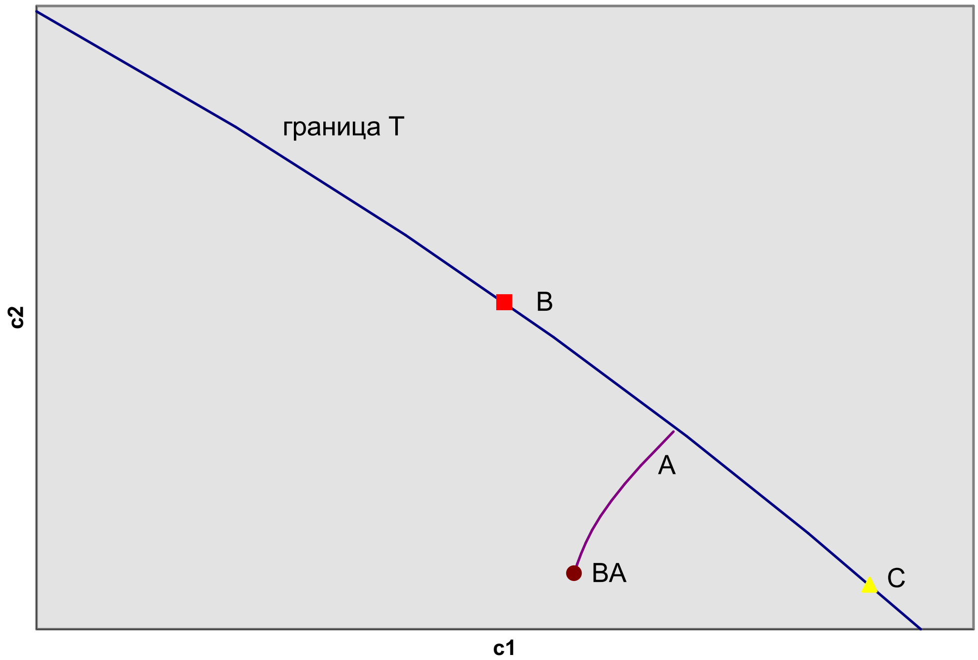

Рис.1 Расположение равновесий в пространстве конечного потребления c_1, c_2 при $\gamma^1 > \gamma^2$. Значения параметров γ^1=5.5, γ^2=3, β^1=2, β^2=3.

Левая и правая части уравнения строго возрастают по s^1 и s^2, соответственно. Поэтому (5.24) задает в квадрате $\{(s^1,s^2): 0 \le s^1, s^2 \le 1/2\}$ возрастающую кривую, соединяющую точки $s^1=s^2=0$ (BA-равновесие) и $s^1=1/2$, $s^2=s^2_* \le 1/2$. Величина s^2_* зависит от соотношения γ^1 и γ^2 и обращается в 1/2 только при $\gamma^1=\gamma^2$. Для каждого $\chi \in [0, 1+2s^2_*]$ уравнения (5.24) и $s^1 + s^2 = \chi / 2$ имеют единственное решение.

Заметим, что доказанная выше Теорема 6 гарантирует существование A-равновесий только при $\chi \le 1$. Однако приведенный пример, а также другие рассмотренные нами примеры, дают основания предположить, что кривая A-равновесий непрерывно продолжается и при $\chi > 1$ до тех пор, пока $s^i \le p^i$ для всех *i*. (В приведенном примере кривая A-равновесий продолжается вплоть до $\chi = 1 + 2s^2_*$.).

На Рис. 1 изображена кривая A-равновесий в пространстве конечного потребления c_1,c_2 при $\gamma^1 > \gamma^2$. Кривая $\partial\mathbf{T}$ представляет границу совокупного технологического множества **T** (множества реализуемых в экономике векторов конечного потребления). На рисунке также представлены точки C-равновесия (равновесия Эрроу-Дебрэ), BA-равновесия и B-равновесия. (В

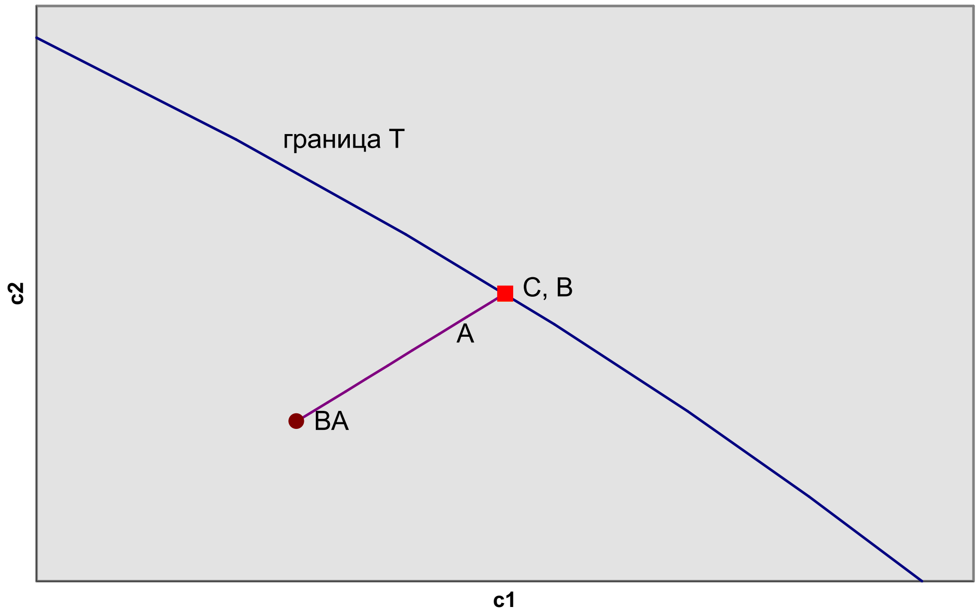

Рис.2 Расположение равновесий в пространстве конечного потребления c_1, c_2 в частном случае $\gamma^1 = \gamma^2 = 3$. Значения параметров $\beta^1 = \beta^2 = 3$.

данном примере В-равновесие характеризуется бартерными ценами $q^1/q^2 = \left(\gamma^2/\gamma^1\right)^{1/3}$). Эффективные В- и С-равновесия лежат на границе **T**, а неэффективное ВА-равновесие расположено внутри **T**.

Видно, что все А-равновесия различаются по натуральным показателям, и все они неэффективны. Кривая лежит строго внутри совокупного технологического множества. Обращает на себя внимание то, что кривая А-равновесия, подходит так близко к границе технологического множества, что значения функции полезности в некоторых А-равновесиях больше, чем в эффективном В-равновесии.

На Рис. 2 показание расположение А-, В-, С- и ВА-равновесий в специальном случае $\gamma^1 = \gamma^2$. В этом случае С- и В- равновесия совпадают, и кривая А-равновесий достигает границы **T** в этой же точке при $\chi = 2$ ($s_*^2 = 1/2$).

Наш опыт использования моделей неэффективного равновесия в прикладных работах по моделированию экономик переходного периода показывает, что представленная на Рис. 1 и 2 картина является достаточно типичной. В связи с этим возникают как минимум две, на наш взгляд, интересные исследовательские задачи: изучить формально геометрию кривой неэффективных равновесий и выявить содержательные факторы, определяющие, какое из равновесий реализуется в экономике.

6 Интеграция производителей

Известно, что в экономике Эрроу-Дебре (в частности, в С-равновесии) у предприятий нет стимула для слияния – объединившись, предприятия не могут увеличить свою суммарную прибыль. В то же время в реальной экономике, и особенно переходной, интеграция предприятий имеет место. Поэтому модели общего равновесия, в которых присутствуют стимулы к интеграции, представляют определенный интерес. Оказывается, что в описанной в предыдущем разделе модели А-равновесия у предприятий есть два стимула для объединения. Первый, достаточно тривиальный, заключается в том, что, объединившись, предприятия могут продавать и покупать на свободном рынке с минимальными транзакционными издержками (Этот стимул к интеграции действует и в экономике с бартером/квазиденьгами, т.е. в модели В-равновесия).

Второй, более интересный, стимул к интеграции в А-равновесии состоит в том, что объединение смягчает ограничение кредитоспособности предприятий (см. работу [19]).

Рассмотрим сначала экономию на транзакционных издержках. Пусть в экономике сложилось В-равновесие с рыночными и бартерными ценами $\boldsymbol{p}_B$ и $\boldsymbol{q}_B$, соответственно. Допустим теперь, что группа предприятий $\Omega \subseteq \{1,...,N\}$, договорилась совместно максимизировать суммарную прибыль. Группа должна решить задачу

$$\sum_{\nu\in\Omega}\left(\boldsymbol{p}A^{\nu}\boldsymbol{x}^{\nu} - \boldsymbol{p}B^{\nu}\boldsymbol{v}^{\nu}\right)\to \max_{\boldsymbol{x}^{\nu},\boldsymbol{v}^{\nu},\boldsymbol{t},\boldsymbol{z}} \tag{6.1}$$

при ограничениях

$$\sum_{\nu\in\Omega}\left(\boldsymbol{x}^{\nu} - \boldsymbol{v}^{\nu}\right)+\boldsymbol{t} \le \boldsymbol{z},\ \boldsymbol{qt} \ge 0,\ \boldsymbol{x}^{\nu},\boldsymbol{y}^{\nu} \ge \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{z} \in \sum_{\nu\in\Omega}\mathbf{T}^{\nu}. \tag{6.2}$$

Если при положительных ценах для некоторых $\nu,\mu \in \Omega$ для некоторого продукта i выполнено $a_i^{\nu} > a_i^{\mu}$ и $x_{Bi}^{\mu} > 0$, то максимальное значение функционала (6.1) строго больше суммы максимальных значений функционалов (4.3) участников группы в В-равновесии. Если же $A^{\nu} = A,\ B^{\nu} = B$ для всех $\nu \in \Omega$, то максимальное значение функционала (6.1) равно сумме максимальных значений функционалов (4.3) участников группы в В-равновесии – в этом случае интеграция не имеет смысла.

Теперь рассмотрим интеграцию в экономике с неплатежами. Допустим, что группа производителей максимизирует суммарную прибыль

$$\sum_{\nu\in\Omega}\left(\boldsymbol{p}A^{\nu}\boldsymbol{x}^{\nu}+(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{s})A^{\nu}\boldsymbol{y}^{\nu}-\boldsymbol{p}B^{\nu}\boldsymbol{v}^{\nu}-(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{s})B^{\nu}\boldsymbol{u}^{\nu}\right), \tag{6.3}$$

при совокупных технологических возможностях

$$\sum_{\nu\in\Omega}\left(\boldsymbol{x}^{\nu}+\boldsymbol{y}^{\nu}-\boldsymbol{v}^{\nu}-\boldsymbol{u}^{\nu}\right)\le \boldsymbol{z}\,,\ \boldsymbol{x}^{\nu},\boldsymbol{y}^{\nu},\boldsymbol{v}^{\nu},\boldsymbol{u}^{\nu}\ge \boldsymbol{0}\,,\ \boldsymbol{z}^{\nu}\in \mathbf{T}^{\Omega}=\sum_{\nu\in\Omega}\mathbf{T}^{\nu} \tag{6.4}$$

и несет совместную ответственность по обязательствам участников

$$\sum_{\nu\in\Omega}\boldsymbol{s}\boldsymbol{y}^{\nu}\ge\sum_{\nu\in\Omega}\boldsymbol{s}\boldsymbol{u}^{\nu}\ , \tag{6.5}$$

Оказывается, что в экономике с неплатежами интеграция увеличивает суммарную прибыль, даже если транзакционные издержки у всех членов группы одинаковы. Пусть $A^{\nu}=A,\ B^{\nu}=B$ для всех $\nu\in\Omega$. Допустим, что в отсутствие интеграции, члены группы имеют разные теневые цены неплатежей – множители Лагранжа при индивидуальных ограничениях кредитоспособности: $\theta^{\nu}>\theta^{\mu}>0$ для некоторых $\nu,\mu\in\Omega$ (см. (5.10)). Тогда максимальное значение функционала (6.3) при ограничениях (6.4)-(6.5) строго больше суммы значений (5.3) при ограничениях (5.1) и (5.2).

Интеграция такого рода – чисто финансовый феномен. Предприятия консолидируют свои долги перед внешними кредиторами и обязательства внешних дебиторов. В этом смысле описанная интеграция соответствует образованию финансово-промышленной группы в том виде, как она определена в соответствующем Федеральном Законе [26]: “ФПГ ... несет солидарную ответственность по обязательствам своих участников”. В наших обозначениях, образование ФПГ эквивалентно формированию внутреннего рынка долгов (неплатежей). На этом рынке устанавливается цена $\boldsymbol{x}^{\nu}$ (множитель Лагранжа при ограничении кредитоспособности группы (6.5)) такая, что спрос на долги фирмами с $\theta^{\nu}>\theta^{\Omega}$ полностью удовлетворяется предложением долгов фирмами с $\theta^{\mu}<\theta^{\Omega}$.

Таким образом, и в В- и в А-равновесиях производители могут получить выгоду от интеграции. Если производители объединяются в группы, то функция предложения, и следовательно равновесные цены могут измениться[13].

Определенный интерес представляет проблема эффективности А-равновесия в экономике с возникающими группами. Вообще говоря,

[13] Легко видеть, что задача группы эквивалентна задаче индивидуального производителя с матрицами транзакционных издержек $a_i^{\Omega}=\max\limits_{\nu\in\Omega}\{a_i^{\nu}\},\ b_i^{\Omega}=\min\limits_{\nu\in\Omega}\{b_i^{\nu}\}$ и технологическим множеством $\mathbf{T}^{\Omega}=\sum_{\nu\in\Omega}\mathbf{T}^{\nu}$ с той только разницей, что группа может одновременно производить несколько различных продуктов. Таким образом, доказанные выше теоремы существования равновесия формально неприменимы к экономикам с группами произвольного состава, однако трудности являются чисто техническими.

интеграция повышает эффективность равновесия. Так как технологическое множество группы $\mathbf{T}^{\Omega} = \sum_{\nu\in\Omega}\mathbf{T}^{\nu}$ может включать неотрицательные векторы чистого выпуска, Теорема 3 о неэффективности равновесия не имеет места. Рассмотрим крайний случай, когда все предприятия в экономике с неплатежами объединяются в одну группу. Внутри группы устанавливаются единые цены на товары ***r***. Группа максимизирует выпуск в ценах ***r***, таким образом достигая Парето границы совокупного технологического множества. Тогда, если равновесие невырождено (например, если матрицы прибыльны), чистый выпуск неотрицателен $\boldsymbol{z}\geq\mathbf{0}$, решением является $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{z}$ и $\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$. При этом $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{p}A$, где A состоит из $a_i = \max_{\nu}\{a_i^{\nu}\}$. Таким образом, равновесие будет совпадать с С-равновесием (***r*** пропорционально ***p***) тогда и только тогда, когда все a_i одинаковы.

7 Заключение

В модели общего равновесия с разницей покупных и продажных цен, введение неплатежей, квазиденег или бартера приводит, как правило, к повышению эффективности, хотя в случае общего положения и не позволяет достичь социального оптимума. Оказывается, что свойства равновесия зависят от вида альтернативного платежного средства. Если предприятия используют в расчетах между собой специальные квазиденьги, которые никак не связаны с собственно деньгами, или же, что то же самое, покупают и продают товары по бартеру, то равновесные цены и выпуски определяются единственным образом (с точностью до нормировки цен). Причем равновесие лежит на Парето-границе совокупного технологического множества, хотя, в случае общего положения, и отличается от точки максимума функции полезности.

Если же предприятия верят друг другу в долг, то существует целое однопараметрическое многообразие равновесий, отличающихся не только масштабом цен, но и реальными величинами. Параметром, характеризующим равновесие, можно считать некоторый уровень неплатежей (например, $\chi = \min_i s^i / p^i$). При этом, чем больше χ, тем дальше равновесие от исходного ВА-равновесия и тем оно эффективнее. Неединственность равновесия, по-видимому, обусловлена привязкой номинальной величины взаимного кредита к недоплате в деньгах – свободный и неплатежный рынок не являются независимыми. В этом смысле природа неединственности та же, что и в моделях общего равновесия с неполными рынками и номинальными активами.

Интересно отметить, что те случаи необщего положения, когда в модели со взаимным кредитом существует эффективное равновесие, оно обязательно совпадает с вальрасовским равновесием и с равновесием в модели с квазиденьгами. И наоборот, когда равновесие в модели с квазиденьгами совпадает с вальрасовским, в модели со взаимным кредитом существует эффективное равновесие.

Равновесие с неплатежами (товарным кредитом) лишено недостатков, которые мы отмечали для равновесия с бартером (см. раздел 4). Мы полагаем, что если уж, как показывает история России XXв. альтернативные деньги необходимы, то оптимальным решение была бы институционализация неплатежей. Заметим, что описанная нами выше модель равновесия с неплатежами использовалась нами на практике при моделировании развития экономики и кредитно-денежной сферы Свердловской области.

Мы предположили, что транзакционные издержки существенны только для рыночных (денежных) расчетов и пренебрегли ими для неденежных форм расчетов. По-видимому, транзакционные издержки действительно ниже для неденежных каналов. На это указывают и данные опросов руководителей предприятий, и простой аргумент, что в противном случае альтернативные институты были бы вытеснены деньгами (в соответствии с законом Гришема). Также представляет интерес и исследование модели общего равновесия, в которой одновременно присутствуют и бартер, и неплатежи.

8 Литература

1. Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А. Опыт математического моделирования экономики, М.: Энергоатомиздат, 1996.
2. Автухович Э.В., Гуриев С.М., Оленев Н.Н., Петров А.А., Поспелов И.Г., Чуканов С.В., Шананин А.А. Математическая модель экономики переходного периода, ВЦ РАН, 1997 (в печати).
3. Nonpayments in Russian economy. Brunswick Brokerage. Oct 28, 1996. Moscow.
4. Делягин М. Экономика неплатежей. М.: РАПС, 1997.
5. Клепач А. Долговая экономика: монетарный, воспроизводственный и властный аспекты проблемы. Вопросы экономики, 1997, N 4, стр. 42- 56
6. Шмелев Н. Неплатежи --- проблема номер один российской экономики. Вопросы экономики, 1997, N 4, стр. 25-41.
7. Макаров В.Л., Клейнер Г.Б. Бартер в экономике переходного периода: особенности и тенденции. Экономика и математические методы, 1997, Том 33, вып. 2, стр. 25-41.
8. Coase R.. The New Institutional Economics. Journal of Institutional and Theoretical Economics, March 1984, vol.140, pp. 229-31.
9. Williamson O.E. The Economic Institutions of Capitalism. NY: The Free Press, 1987.
10. Bisin A. General Equilibrium with Endogeneously Incomplete Financial Markets. New York University, mimeo, 1995.
11. Niehans J. Money and Barter in General Equilibrium with Transactions Costs. American Economic Review, Dec 1971, Vol. 61, pp. 773-83.
12. Banerjee, A. and Maskin E. A Walrasian Theory of Money and Barter, Quarterly Journal of Economics, 1996.
13. Williamson S., Wright R.. Barter and Monetary Exchange Under Private Information. American Economic Review, March 1994, Vol. 84, pp. 104-23.

14.Никайдо М. Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир, 1972.
15.Гуриев С.М., Поспелов И.Г. Модель общего равновесия экономики переходного периода. Математическое моделирование, 1994 т.6 N2 стр. 3-21.
16.Blanchard O., Fischer S. Lectures on Macroeconomics. Cambridge, MIT Press, 1989.
17.Поспелов И.Г. Модель поведения потребителей в условиях льготного кредитования. Математическое моделирование, 1995 т.7 N 3, с.60-82.
18.Demers F., Demers M. "Price Uncertainty, the Competitive Firm and the Dual Theory of Choice under Risk." European Economic Review, 34, 1181-1199.
19.Гуриев С.М., Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А. Роль неплатежей в интеграции предприятий. Экономика и математические методы, 1998 [в печати].
20.Dubey P., Geanakoplos J. The Value of Money in a Finite-Horizon Economy: A Role for Banks. Cowles Foundation paper No.901. New Haven, 1995.
21.Grigoriev, Pavel. Arrears and the Structure of the Russian Economy: Industrial Organization and Pricing Mechanisms. New Economic School, 1997.
22.Perotti, E. Collusive Arrears in Transition Economies. European Economic Review, 1996.
23. Granville B., Polterovich V., Denisova I., Medvedev A. Inflation and Recession: Preliminary Results for Russia. Prepared for the Conference "Government in Economic Transition" Mimeo, New Economic School, 1996.
24.Kim, S. and Kwon, G. A General Equilibrium Approach to Inter-Enterprise Arrears in Transition Economies with Application to Russia. IMF Working Papers, 1995.
25.Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. М., Наука, 1984 296с.
26.Федеральный закон о финансово-промышленных группах. М.: Ось, 1996.

Приложение

Доказательство Леммы 1. Если $\boldsymbol{w} \in \mathbf{T} = \sum_\nu \mathbf{T}^\nu$, и $\boldsymbol{rw} = \sum_\nu \boldsymbol{rz}^\nu$ то $\boldsymbol{w} \in \partial\mathbf{T} = \{\boldsymbol{z} \in \mathbf{T} : \forall \boldsymbol{z}' \in T\, \exists i : z_i \geq z'_i\}$ ($\partial\mathbf{T}$ – граница $\mathbf{T}$), но для продуктивной экономики $\boldsymbol{0} \in \mathbf{T}$, $\boldsymbol{0} \notin \partial\mathbf{T}$, значит $\sum_\nu \boldsymbol{rz}^\nu > 0$.

Пусть теперь экономика продуктивна и неразложима, а $\sum_\nu \boldsymbol{z}^\nu \in \mathbf{R}^n_+$. Рассмотрим множество продуктов $K = \{i = 1,...,n \mid r_i = 0\}$ и множество фирм, которые могут их производить $\Omega = \{\nu = 1,..., N \mid r_{i_\nu} = 0\}$. Поскольку $\boldsymbol{z}^\nu \in \operatorname*{Argmax}_{\boldsymbol{z}^\nu \in T^\nu} \boldsymbol{rz}^\nu$, из (2.1) следует, что $z_j^\nu = 0$ при $j \notin K$, $\nu \in \Omega$. Положим $\boldsymbol{w} = \sum_{\nu\in\Omega} \boldsymbol{z}^\nu$. Если $w_j < 0$, то по доказанному $j \in K$, но тогда неравенство $\sum_\nu \boldsymbol{z}^\nu \geq \boldsymbol{0}$ невозможно, поскольку никто, кроме фирм из Ω не производит продуктов $j \in K$. Если же $w_j > 0$, то опять таки $j \in K$ и в системе возможен конечный выпуск продукта j без производства продуктов $i \notin K$, что противоречит неразложимости поскольку по условию леммы $K \neq \{1,...,n\}$. Таким образом, $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$ и $\boldsymbol{z} = \sum_{\nu\notin\Omega} \boldsymbol{z}^\nu \geq \boldsymbol{0}$. Поскольку фирмы $\nu \notin \Omega$ могут только затрачивать продукты $j \in K$, $z_j^\nu = 0$ при $j \in K$, $\nu \notin \Omega$, а значит эти фирмы могут обеспечить конечный выпуск без производства продуктов $j \in K$. В силу (2.5) это возможно только при $K = \varnothing$, т.е. при $\boldsymbol{r} \in \operatorname{int} \mathbf{R}^n_+$.

Доказательство Теоремы 1. Из (2.12), (2.6) следует, что $\boldsymbol{z}_C^\nu \in \operatorname*{Argmax}_{\boldsymbol{z}^\nu \in \mathbf{T}^\nu} \{\boldsymbol{p}_C \boldsymbol{z}^\nu\}$, $\boldsymbol{p}_C \boldsymbol{x}_C^\nu - \boldsymbol{p}_C \boldsymbol{v}_C^\nu = \boldsymbol{p}_C \boldsymbol{z}_C^\nu$, и для определения величин $\boldsymbol{p}_C$, ψ_C, $\boldsymbol{c}_C$, $\boldsymbol{z}_C^\nu$ получается частный случай модели равновесия Эрроу-Дебре. В рассматриваемом случае одного потребителя легко проверяется известное свойство модели, состоящее в том, что определение равновесия эквивалентно условиям $\{\boldsymbol{z}_C^\nu\} \in \operatorname*{Argmax}_{\boldsymbol{z}^\nu \in \mathbf{T}^\nu} \omega\left(\sum_\nu \boldsymbol{z}^\nu\right)$, $p_C \in \partial\omega\left(\sum_\nu \boldsymbol{z}^\nu\right)$, из которых следует эффективность. Найдя $\boldsymbol{z}_C^\nu$, можно положить $\boldsymbol{x}_C^\nu$, $\boldsymbol{v}_C^\nu$ равными положительной и отрицательной части $\boldsymbol{z}_C^\nu$. Если экономика продуктивна, то по лемме 1 $\psi_C = \sum_\nu \boldsymbol{p}_C \boldsymbol{z}_C^\nu > 0$ и максимум ω на технологическом множестве будет и максимумом на бюджетном ограничении.

Доказательство Леммы 2. Из (3.6) следует, что существуют числа $\psi_+ \geq \psi_- > 0$, такие что $\boldsymbol{pw} \in \mathbf{I} = [\psi_-, \psi_+]$ при $\boldsymbol{w} \in \mathrm{S}(\boldsymbol{p})$. Будем считать, что потребители обладают некоторым запасом денег $\psi \in \mathbf{I}$ и определим функцию спроса $\mathrm{D} : \mathbf{P}^n \times \mathbf{I} \to 2^{R^n}$ как

$$\mathrm{D}(\boldsymbol{p}, \psi) = \operatorname*{Argmax}_{\boldsymbol{c}} \{\omega(\boldsymbol{c})\} \text{ при условиях } \boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{c} \leq 2\boldsymbol{m} \text{ и } \boldsymbol{pc} \leq \psi, \quad (1)$$

где $\boldsymbol{m}$ – верхняя граница образов S.

Это отображение имеет непустые выпуклые значения, а поскольку $\psi\,\mu$ отделено от нуля D имеет замкнутый график (см. [25]). Образы функции избыточного предложения $\mathrm{S}(\boldsymbol{p})-\mathrm{D}(\boldsymbol{p},\psi)$ лежат в некотором выпуклом компакте **K.**

Определим точечно-множественное отображение $\mathrm{A}\ :\ \mathbf{P}^n\times\mathbf{K}\times\mathbf{I}\to 2^{\mathbf{P}^n\times K\times\mathbf{I}}$ так что $\langle\boldsymbol{p}',\boldsymbol{e}',\psi'\rangle\in\mathrm{A}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{e},\psi)$ тогда и только тогда когда

$$\boldsymbol{p}'\in\operatorname*{Argmin}_{\boldsymbol{q}\in\mathbf{P}^n}\boldsymbol{qe}\,, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{e}'=\boldsymbol{w}-\boldsymbol{c}$$

$$\psi'=\boldsymbol{pw} \tag{3}$$

для некоторых $\boldsymbol{w}\in\mathrm{S}(\boldsymbol{p})$, $\boldsymbol{c}\in\mathrm{D}(\boldsymbol{p},\psi)$.

Отображение A удовлетворяет условиям теоремы Какутани (см. [14]) и, следовательно, имеет неподвижную точку $\boldsymbol{p}_*,\boldsymbol{e}_*,\psi_*\in\mathrm{A}(\boldsymbol{p}_*,\boldsymbol{e}_*,\psi_*)$. Из (3) следует, что найдется $\boldsymbol{w}_*\in\mathrm{S}(\boldsymbol{p}_*)$, такой что $\psi_*=\boldsymbol{p}_*\boldsymbol{w}_*$. Пусть $\boldsymbol{c}_*\in\mathrm{D}(\boldsymbol{p}_*,\psi_*)$. В силу (1) $\boldsymbol{p}_*\boldsymbol{c}_*\le\psi_*$, так что $\boldsymbol{p}_*(\boldsymbol{w}_*-\boldsymbol{c}_*)=\boldsymbol{p}_*\boldsymbol{e}_*\ge 0$ Для любого $\boldsymbol{p}\in\mathbf{P}^n$ $\boldsymbol{pe}_*\ge\boldsymbol{p}_*\boldsymbol{e}_*$ Следовательно $\boldsymbol{pe}_*\ge 0$ для любого $\boldsymbol{p}\in\mathbf{P}^n$, а значит $\boldsymbol{e}_*=\boldsymbol{w}_*-\boldsymbol{c}_*\ge 0$. В силу ненасыщаемости спроса (2.7) $\boldsymbol{c}_*$ расположено на "северо-восточной" границе допустимого множества в (5.14), но значение $c_i=2m_i$ исключается предыдущим неравенством, поэтому $\boldsymbol{p}_*\boldsymbol{c}_*=\psi_*=\boldsymbol{p}_*\boldsymbol{w}_*$. Лемма доказана

<u>Лемма 3</u>. Пусть **К** – выпуклый компакт в $\boldsymbol{R}^m$, для которого точка $\boldsymbol{0}$ – внутренняя. Тогда отображение $\mathrm{R}:\boldsymbol{R}^m\to 2^{\mathbf{K}}$, $\mathrm{R}(\boldsymbol{l})=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{K}\,|\,\boldsymbol{lx}\ge 0\}$ непрерывно по Хаусдорфу (а, следовательно, полунепрерывно сверху и снизу) при $\boldsymbol{l}\ne\boldsymbol{0}$.

<u>Доказательство Леммы 3</u>. Обозначим через $\varphi(\boldsymbol{q})$ и $\xi_{\boldsymbol{l}}(\boldsymbol{q})$ опорные функции множеств **K** и $\mathrm{R}(\boldsymbol{l})$, соответственно. Поскольку $\boldsymbol{0}\in\operatorname{int}\boldsymbol{R}^m$, задача $\boldsymbol{qx}\to\max$ по $\boldsymbol{x}\in\mathbf{K}$ при условии $\boldsymbol{lx}\ge 0$ удовлетворяет условию Слейтера, так что $\xi_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{q})=\inf_{\lambda\ge 0}\max_{\boldsymbol{x}\in\mathbf{K}}(\boldsymbol{qx}+\lambda\boldsymbol{lx})=\inf_{\lambda\ge 0}\varphi(\boldsymbol{q}+\lambda\boldsymbol{l})$. Пусть теперь вектор $\boldsymbol{q}$ пробегает единичную сферу $\boldsymbol{S}^{m-1}$. Тогда

$$\varphi(\boldsymbol{q}+\lambda\boldsymbol{l})\ge\lambda\left(\varphi(\boldsymbol{l})+\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{q}\nabla\varphi(\boldsymbol{l})\right)\ge\ \lambda\left(\inf_{\boldsymbol{l}\in\mathbf{O}}\varphi(\boldsymbol{l})+\frac{1}{\lambda}\inf_{\boldsymbol{q}\in\mathbf{S}^{m-1}}\inf_{\boldsymbol{x}\in\partial\mathbf{K}}\boldsymbol{qx}\right),$$

где **O** – некоторая окрестность точки $\boldsymbol{l}$. Поскольку $\boldsymbol{0}\in\operatorname{int}\boldsymbol{R}^m$, φ обращается в ноль только в нуле, и, если $\boldsymbol{l}\ne\boldsymbol{0}$, **O** можно выбрать так, чтобы $\inf_{\boldsymbol{l}\in\mathbf{O}}\varphi(\boldsymbol{l})>0$. Тогда при $\lambda>-2\left(\inf_{\boldsymbol{q}\in\mathbf{S}^{m-1}}\inf_{\boldsymbol{x}\in\partial\mathbf{K}}\boldsymbol{qx}\right)/\inf_{\boldsymbol{l}\in\mathbf{O}}\varphi(\boldsymbol{l})$, $\lambda>2\inf_{\boldsymbol{l}\in\mathbf{O}}\varphi(\boldsymbol{l})\,/\max_{\boldsymbol{q}\in\mathbf{S}^{m-1}}\varphi(\boldsymbol{q})$ $\varphi(\boldsymbol{q}+\lambda\boldsymbol{l})\ge\varphi(\boldsymbol{q}+\lambda\boldsymbol{l})\big|_{\lambda=0}$. Таким образом, существует окрестность **O** точки $\boldsymbol{l}\ne\boldsymbol{0}$ и число Λ, такие, что при $\boldsymbol{l}\in\mathbf{O}$ $\xi_{\boldsymbol{l}}(\boldsymbol{q})=\min_{\Lambda\ge\lambda\ge 0}\varphi(\boldsymbol{q}+\lambda\boldsymbol{l})$. Отсюда следует, что $\xi_{\boldsymbol{l}}(\boldsymbol{q})$ непрерывна по $\boldsymbol{l}$ и $\boldsymbol{q}$ на

$\mathbf{O} \times \boldsymbol{S}^{m-1}$, а поэтому при $\boldsymbol{l}_n \to \boldsymbol{l}$ $\xi_{\boldsymbol{l}_n}(\boldsymbol{q}) \to \xi_{\boldsymbol{l}}(\boldsymbol{q})$ равномерно по $\boldsymbol{q} \in \boldsymbol{S}^{m-1}$. Равномерная же сходимость опорных функций на сфере эквивалентна сходимости соответствующих выпуклых компактов по Хаусдорфу.

Лемма 4. Задача (5.3), (5.1), (5.2), (5.6) удовлетворяет условию Слейтера для ограничений $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} - \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u} \le \boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{u}) \ge 0$, а множество ее решений $\mathrm{X}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s})$ полурепрерывно сверху при $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{p} \in \mathbf{R}^n$.

Доказательство Леммы 4 Выберем $\boldsymbol{w} \in \operatorname{int} \mathbf{R}^{\mathrm{n}}_{+}$, $\boldsymbol{w} < \boldsymbol{m}/8$ и положим $\tilde{z}_{i_\nu} = f^{\nu}(\boldsymbol{w})/2$, $\tilde{z}_k = -w_k$ при $k \ne i_\nu$; $\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{m}/16$; $\tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{m}/8$; $\tilde{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{m}/4$; $\tilde{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{m}/16$. Легко видеть, что точка $\langle \tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}, \tilde{\boldsymbol{v}}, \tilde{\boldsymbol{u}} \rangle$ удовлетворяет нужным условиям Слейтера. Заметим также, что точка $\tilde{\boldsymbol{a}} = \langle \tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{u}}, \tilde{\boldsymbol{v}}, \tilde{\boldsymbol{u}} \rangle$ отстоит на конечное расстояние от всех границ $\mathrm{R}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{n}, \chi)$, кроме границы, определяемой равенством $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{u}) = 0$, на которой она лежит.

Для доказательства замкнутости графика $\mathrm{X}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s})$ рассмотрим отдельно случаи $\boldsymbol{s} \ne \boldsymbol{0}$ и $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{0}$.

Пусть $\boldsymbol{s} \ne \boldsymbol{0}$. Допустимое множество задачи имеет вид $\mathrm{R}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}) =$
$\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^{\mathrm{n}}_{+}, \boldsymbol{z} \in \mathbf{T}^{\nu} \mid \ \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} - \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u} \le \boldsymbol{z}, \boldsymbol{s}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{u}) \ge 0, \ \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \le 2N\boldsymbol{m}, \boldsymbol{z} \ge -3N\boldsymbol{m}\}$

Возьмем указанную выше точку $\tilde{\boldsymbol{a}}$ за начало отсчета и сделаем замену переменных $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{z} \rangle = \mathrm{F}(\langle \boldsymbol{x}', t', \boldsymbol{v}', \boldsymbol{u}', \boldsymbol{z}' \rangle)$ по формулам

$$\boldsymbol{x} = \tilde{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{x}', \ \boldsymbol{y} = \tilde{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{u}' + t', \ \boldsymbol{v} = \tilde{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{v}', \ \boldsymbol{u} = \tilde{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{u}'.$$

В новых переменных допустимое множество имеет вид $\mathbf{K} \cap \{\boldsymbol{x}', t', \boldsymbol{v}', \boldsymbol{u}', \boldsymbol{z}' \mid \chi \boldsymbol{n} t' \ge 0\}$, где $\mathbf{K}$ – выпуклый компакт в $\mathbf{R}^{5\mathrm{n}}$ не зависящий от $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{n}, \chi$, $\boldsymbol{0} \in \operatorname{int} \mathbf{K}$. Точечно-множественное отображение R представляется как $\mathrm{R} = \mathrm{F} \circ \mathrm{R}' \circ \mathrm{L}$, где F – замена переменных $\mathrm{L} : \mathbf{R}^{2n+1} \to \mathbf{R}^{5n}$ непрерывное отображение $\mathrm{L}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}) = \langle \boldsymbol{0}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{0} \rangle$, а R' – точечно-множественное отображение $\mathrm{R}' : \boldsymbol{R}^{5n} \to 2^{\mathbf{K}}$, $\mathrm{R}'(\boldsymbol{l}) = \mathbf{K} \cap \{\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{l}\boldsymbol{a} \ge 0\}$. По Лемме 3 R' полунепрерывно свержу и снизу при $\boldsymbol{l} \ne \boldsymbol{0}$, а поскольку F взаимно однозначно и взаимно непрерывно и L – однозначно, непрерывно и не обращается в ноль при $\boldsymbol{s} \ne \boldsymbol{0}$ R также будет полунепрерывно сверху и снизу в точке $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{p} \in \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{s} \ne \boldsymbol{0}$.

Пусть теперь $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{0}$. Возьмем произвольные последовательности $\boldsymbol{s}_k \to \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{p}_k \to \boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{s}_k, \boldsymbol{p}_k \in \mathbf{R}^n$. Им соответствует последовательность решений задач (5.3), (5.1), (5.2), (5.6) $\boldsymbol{a}_k = \langle \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{y}_k, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{z}_k \rangle$, которую без ограничения общности можно считать сходящейся к некоторой $\boldsymbol{a} = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{z} \rangle$, причем последняя очевидно будет допустимой для предельных значений параметров $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{p}$. Пусть теперь $\boldsymbol{a}' = \langle \boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}', \boldsymbol{v}', \boldsymbol{u}', \boldsymbol{z}' \rangle$ – другая допустимая точка при $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{p}$. Легко проверить, что точка $\boldsymbol{a}'' = \langle \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{y}', \boldsymbol{0}, \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{u}', \boldsymbol{0}, \boldsymbol{z}' \rangle$ будет допустимой при $\boldsymbol{s}_k, \boldsymbol{p}_k$. Поэтому $\boldsymbol{p}_k A^{\nu} \boldsymbol{x}_k + (\boldsymbol{p}_k - \boldsymbol{s}_k) A^{\nu} \boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{p}_k B^{\nu} \boldsymbol{v}_k - (\boldsymbol{p}_k - \boldsymbol{s}_k) B^{\nu} \boldsymbol{u}_k \ge$

$\boldsymbol{p}_k A^{\nu}\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{p}_k A^{\nu}\boldsymbol{y}' - \boldsymbol{p}_k B^{\nu}\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{p}_k B^{\nu}\boldsymbol{u}'$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $\boldsymbol{s}_k \to \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{p}_k \to \boldsymbol{p}$, получаем, что предельная точка $\boldsymbol{a} = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{z} \rangle$ не хуже произвольной допустимой $\boldsymbol{a}' = \langle \boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}', \boldsymbol{v}', \boldsymbol{u}', \boldsymbol{z}' \rangle$. Лемма доказана

<u>Лемма 5</u>. Пусть технологические множества имеют вид (2.4), (2.2), (2.5) и $\boldsymbol{z}^{\nu} \in \mathbf{T}^{\nu}$, $\nu = 1,...,N$, $\sum_{\nu} \boldsymbol{z}^{\nu} \in \mathbf{R}^{n}_{+}$. Если существуют $\boldsymbol{p} \in \mathbf{R}^{n}_{++}$; $\boldsymbol{r}^{\nu} \in \mathbf{R}^{n}_{+}$, $\boldsymbol{w}^{\nu} \in \mathbf{R}^{n}$, $\nu = 1,...,N$ и положительные диагональные матрицы A^{ν} $\nu = 1,...,N$ такие, что

$$\boldsymbol{z}^{\nu} \in \operatorname*{Argmax}_{\boldsymbol{z} \in \mathrm{T}^{\nu}} \boldsymbol{r}^{\nu}\boldsymbol{z}, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{w}^{\nu} \geq \boldsymbol{z}^{\nu}, \qquad \boldsymbol{r}^{\nu} \in \operatorname*{Argmin}_{\boldsymbol{r} \geq \boldsymbol{p}A^{\nu}} \boldsymbol{r}\boldsymbol{w}^{\nu}, \tag{5}$$

то $\boldsymbol{p} > \boldsymbol{0}$.

<u>Доказательство Леммы 5</u>. Данная лемма является обобщением второго утверждения Леммы 1. Пусть снова $K = \{ i = 1,...,n \,|\, p_i = 0 \}$ множество продуктов с нулевой ценой, а $\Omega = \{ \nu = 1,...,N \,|\, \exists k \in K \; z^{\nu}_k = z^{\nu}_{k_\nu} > 0 \}$ – множество фирм, которые их производят. Из неразложимости (2.5) и включения $\sum_{\nu} \boldsymbol{z}^{\nu} \in \mathbf{R}^{n}_{+}$ следует, что $\Omega \neq \varnothing$, если $K \neq \varnothing$. Пусть $\nu \in \Omega$. Из первого соотношения (5) следует, что $w^{\nu}_{k_\nu} > 0$ и тогда из второго – что $r^{\nu}_{k_\nu} = a^{\nu}_{k_\nu} p^{\nu}_{k_\nu} = 0$. Но тогда из вида технологических множеств (2.2) и (4) следует, что $r^{\nu}_j = 0$ при $z^{\nu}_j \neq 0$. Поскольку, в силу (5), $\boldsymbol{r}^{\nu} \geq \boldsymbol{p}A^{\nu}$, это означает, что $z^{\nu}_j = 0$ при $j \notin K$, $\nu \in \Omega$. Дальнейшие рассуждения буквально повторяют доказательство Леммы 2.