ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 25. 1985 № 12

УДК 519.833

УСТОЙЧИВЫЕ КОМПРОМИССЫ В ИГРАХ СО СТРУКТУРИРОВАННЫМИ ФУНКЦИЯМИ ВЫИГРЫША

КУКУШКИН Н.С., МЕНЬШИКОВ И.С., МЕНЬШИКОВА О.Р., МОИСЕЕВ Н.Н.

(Москва)

Исследуется один класс игр в нормальной форме, предназначенных для теоретико-игрового анализа моделей экологического характера. Показано существование в произвольной игре данного класса оптимальной по Парето ситуации равновесия. При выполнении определенных условий регулярности существует исход, устойчивый в любом разумном смысле.

Введение

В настоящей работе изучаются игры в нормальной форме, у которых функции выигрыша устроены следующим образом. Выделены некоторые группы игроков, совокупность их именуется структурой игры; каждой группе соответствует вещественнозначная функция, значения которой зависят от стратегий игроков, входящих в данную группу. В моделях экологического характера [1] в одну группу объединяются участники, взаимодействующие с одним природным объектом, групповая функция выражает состояние (в том или ином смысле) этого объекта. Функция выигрыша каждого игрока — минимум групповых функций по всем группам, в которые он входит.

Впервые частный случай такой модели был рассмотрен Ю. Б. Гермейером и И. А. Вателем [2]. В работах [2]—[4] был установлен ряд замечательных свойств игр Гермейера — Вателя, однако принятые в них предположения о ресурсном характере ограничений и монотонности групповых функций чрезмерно ограничивали область возможных приложений. Ниже будет показано, что указанные свойства в действительности определяются самим устройством функций выигрыша и отчасти — дополнительными условиями регулярности. При этом будет развита новая техника доказательств, лишь в самых общих чертах следующая подходу работы [4].

Непосредственным объектом внимания будут возможности заключения устойчивого соглашения всех игроков о выборе стратегий. Исходная посылка такова: всякое соглашение заключается добровольно и нельзя не считаться с возможностью его нарушения. Хотя, вообще говоря, можно рассматривать различные способы борьбы с отклонениями от заключенного соглашения (см., например, [5], [6]), нас будут интересовать ситуации, когда возможные нарушения невыгодны самим нарушителям и никаких специальных мер для стабилизации соглашения не требуется.

Рассмотрим два основных типа отклонений: отклонения «до» (соглашения) и отклонения «после» (соглашения). Отклонение «после» состоит в том, что отдельный игрок или целая коалиция после заключения общего соглашения тайно выбирает другую стратегию, рассчитывая, что остальные игроки будут выполнять соглашение. Устойчивость по отношению к таким отклонениям давно изучается в теории игр (равновесие по Нэшу [7], коалиционное равновесие [8]). Отклонение «до» состоит в том, что отдельный игрок или целая коалиция, отказываясь от переговоров с партнерами, фиксирует свою стратегию, предоставляя оставшимся игрокам договариваться о выборе своего совместного решения. Изучение устойчивости по отношению к таким отклонениям не столь популярно в современной теории игр. Этому можно указать по меньшей мере две причины: во-первых, в играх более двух лиц общего вида невозможно оценить результат заданного отклонения, во-вторых, даже для игр двух лиц неизвестны какие-либо простые общие условия существования устойчивых исходов (как, например, условия выпуклости-вогнутости для равновесий по Нэшу).

Дадим краткий обзор содержания работы. В § 1 собраны основные определения. В § 2 изложены результаты, не требующие каких-либо дополнительных предположений; все они связаны с устойчивостью по отношению к отклонениям «после». Дальнейшие результаты требуют наложения на групповые функции дополнительных условий регулярности. В сильно регулярном случае существует единственный (в смысле выигрышей) исход игры, устойчивый по отношению к любым отклонениям «до» и «после». Рассматриваются и ослабленные условия регулярности, приводящие к несколько более слабым результатам. В § 3 изучаются двухуровневые игры, для которых и формулировки, и доказательства существенно упрощаются. В § 4 рассматриваются общие регулярные игры.

§ 1. Основные определения

Во всем дальнейшем изложении игра Г будет задаваться указанием множества игроков $N=\{1, 2, \ldots, n\}$, структуры $\Sigma\subseteq 2^N\setminus\{\varnothing\}$, множеств стратегий X_i, $i\in N$, и для каждого $S\in\Sigma$ непрерывной вещественнозначной функции $\varphi_S(x^S)$ на

$$X^S=\prod_{i\in S} X_i.$$

Каждое множество X_i будет предполагаться компактным в метрике ρ_i, прямое произведение всех X_i с метрикой

$$\rho(x, y)=\max_{i\in N}\rho_i(x_i, y_i)$$

будет называться множеством исходов игры Г и обозначаться X, для каждого $I\subseteq N$ прямое произведение X_i по $i\in I$ с метрикой

$$\rho_I(x^I, y^I)=\max_{i\in I}\rho_i(x_i, y_i)$$

будет обозначаться X^I. Для каждого $i\in N$ обозначим $\Sigma_i=\{S\in\Sigma | i\in S\}$; естественно предполагать, что $\Sigma_i\neq\varnothing$ для каждого $i\in N$, однако оказывается удобнее этого не делать. Для каждого $i\in N$ функция выигрыша f_i на X определяется равенством

$$f_i(x)=\min_{S\in\Sigma_i}\varphi_S(x^S),$$

где x^S — набор компонент x_i для всех $i \in S$ (если $\Sigma_i = \varnothing$, то будем полагать $f_i(x) \equiv +\infty$). Вектор, составленный из значений всех функций $f_i(x)$, $i \in N$, обозначим $f(x)$. Используем стандартное обозначение: если $x \in X$, $I \subsetneq N$, $y^I \in X^I$, то $x\|y^I$ — результат замены в исходе x для всех $i \in I$ компонент x_i на y_i.

Полный набор функций φ_S, $S \in \Sigma$, будем называть «вектором φ» и будем считать, что игра Γ определяется вектором φ (естественно полагать, что задание вектора предполагает задание и множества его компонент — структуры Σ и их внутреннего устройства, в частности множеств X^S). Если зафиксировать структуру Σ и множества X_i, $i \in N$, то всевозможные векторы φ с нормой

$$\|\varphi\| = \max_{S \in \Sigma} \max_{x^S \in X^S} |\varphi_S(x^S)|$$

образуют банахово пространство, обозначаемое в дальнейшем Φ.

Напомним ряд определений, формализующих устойчивость по отношению к отклонениям «после». Будем говорить, что $y^I \in X^I$, $I \subseteq N$, является выгодным для коалиции I отклонением от исхода $x \in X$, если $f_i(x\|y^I) \geqslant f_i(x)$ для всех $i \in I$, причем хотя бы для одного из этих i неравенство строгое. Исход $x \in X$ называется равновесием по Нэшу, если ни для какого $i \in N$ не существует отклонения от исхода x, выгодного для коалиции $\{i\}$ (другими словами, если $f_i(x) \geqslant f_i(x\|y_i)$ при всех $i \in N$, $y_i \in X_i$), оптимальным по Парето, если не существует отклонения от исхода x, выгодного для коалиции всех игроков N, и сильно (коалиционно) равновесным, если ни для одной коалиции $I \subseteq N$ не существует выгодного для I отклонения от исхода x. Для игры Γ, определенной вектором φ, множества, соответственно, равновесий по Нэшу, оптимумов Парето и сильных равновесий будем обозначать $\mathrm{NE}(\varphi)$, $\mathrm{PO}(\varphi)$, $\mathrm{SE}(\varphi)$. По определению имеем $\mathrm{SE}(\varphi) \subseteq \mathrm{NE}(\varphi) \cap \mathrm{PO}(\varphi)$. Для $i \in N$ будем обозначать

$$\mathrm{R}_i(\varphi) = \{x \in X \mid x_i \in \operatorname{Arg}\max_{y_i \in X_i} f_i(x\|y_i)\}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\mathrm{NE}(\varphi) = \bigcap_{i \in N} \mathrm{R}_i(\varphi).$$

Исключительно важным для нас оказывается понятие N-ядра. Введенное в [9] (для игр в форме характеристической функции) в качестве формализации идеи справедливого компромисса, в настоящей статье оно будет играть скорее техническую роль, хотя естественная сравнимость структурированных функций выигрыша делает в нашем случае такую интерпретацию более обоснованной, чем применительно к играм общего вида.

Точное определение N-ядра неизбежно оказывается несколько громоздким. Для каждого вектора $w = (w_1, \ldots, w_n) \in R^n$ вектор $\vartheta(w) = (\vartheta_1(w), \ldots, \vartheta_n(w))$ однозначно определяется условиями: 1) $\vartheta_1(w) \leqslant \ldots \leqslant \vartheta_n(w)$, 2) существует взаимно-однозначное отображение σ: $N \to N$, для которого $\vartheta_i(w) = w_{\sigma(i)}$ при всех $i \in N$. Попросту говоря, $\vartheta(w)$ — результат упорядочения компонент вектора w по возрастанию. Будем говорить, что вектор $v \in R^n$ лексикографически лучше вектора $w \in R^n$, если найдется номер $k \in N$, для которого $\vartheta_k(v) > \vartheta_k(w)$ и $\vartheta_i(v) \geqslant \vartheta_i(w)$ для всех $i \leqslant k$. Будем говорить, что исход x игры Γ, определяемой вектором φ, входит в ее N-ядро (обозначается $x \in \mathrm{Nucl}(\varphi)$), если нет такого исхода y, чтобы вектор $f(y)$ был лексикографически лучше вектора $f(x)$. Поскольку отображение ϑ: $R^n \to R^n$ непрерывно, в наших условиях компактности-непрерывности нетрудно показать, что $\mathrm{Nucl}\,(\varphi) \neq \varnothing$.

По определению имеем $\mathrm{Nucl}\,(\varphi) \subseteq \mathrm{PO}(\varphi)$, поэтому если $x \in \mathrm{Nucl}\,(\varphi)$, $f(x) \neq f(y)$, то найдется номер $j \in N$, для которого $f_j(x) > f_j(y)$. Введем очень полезное для дальнейшего обозначение

$$1 \qquad w^* = \min_{{}_j(x) > f_j} f_j(y)$$

Для исхода $x \in X$ и числа w будем обозначать $I(x, w) = \{i \in N \mid f_i(x) \leqslant w\}$.

Лемма 1. *Если* $x \in \mathrm{Nucl}\,(\varphi)$, $f(x) \neq f(y)$, w^* *определено равенством* (1), *то* $f_i(x) \geqslant f_i(y)$ *для всех* $i \in I(y, w^*)$.

Действительно, по определению w^* имеем $f_j(x) \leqslant f_j(y)$ для всех $j \in I(x, w^*)$. Если найдется номер $i \in I(y, w^*)$, для которого $f_i(x) < f_i(y)$, то обязательно $f_i(x) < w^*$, $i \in I(x, w^*)$ и $I(y, f_i(x)) \subset I(x, f_i(x))$. Из последнего соотношения вытекает, что вектор $f(y)$ лексикографически лучше вектора $f(x)$, что противоречит условию $x \in \mathrm{Nucl}\,(\varphi)$.

Это несложное утверждение будет многократно использоваться в последующих доказательствах.

Опишем, наконец, два варианта перехода от игры Γ к игре с меньшим числом игроков. Пусть $I \subseteq N$. В подыгре, определяемой вектором φ^I, участвуют игроки $i \in I$ с теми же множествами стратегий X_i; $\Sigma^I = \{S \in \Sigma \mid S \subseteq I\}$, $\varphi_S{}^I(x^S) = \varphi_S(x^S)$ для всех $S \in \Sigma^I$.

Пусть $I \subseteq N$, $x^I \in X^I$. В фактор-игре, определяемой вектором φ^{x^I}, участвуют игроки $i \in N \diagdown I$ с теми же множествами стратегий X_i. Для каждого $T \subseteq N \diagdown I$ обозначим $\Sigma(T) = \{S \in \Sigma \mid S \cap (N \diagdown I) = T\}$ и положим $\Sigma^{x^I} = \{T \subseteq N \diagdown I \mid |\Sigma(T) \neq \varnothing\}$. Для каждого $T \in \Sigma^{x^I}$ положим

$$\varphi_T{}^{x^I}(x^T) = \min_{S \in \Sigma(T)} \varphi_S(x^S).$$

Понятие подыгры специфично для игр со структурированными функциями выигрыша, фактор-игра же является просто результатом фиксации в игре Γ стратегии x^I коалиции I.

§ 2. Игры общего вида

В этом параграфе излагаются результаты, относящиеся к общему случаю, т. е. предполагается лишь, что множества X_i — метрические компакты, а функции φ_S непрерывны; множество Σ произвольное.

Теорема 1. *Для любого вектора* φ *справедливо включение* $\mathrm{Nucl}\,(\varphi) \subseteq \mathrm{NE}(\varphi)$.

Пусть $x \in \mathrm{Nucl}\,(\varphi)$, $i \in N$, $y_i \in X_i$; положим $y = x \| y_i$. Если бы $f_i(y) > f_i(x)$, то, поскольку $x \in \mathrm{Nucl}\,(\varphi)$, нашелся бы номер $j \in N$, для которого $f_j(y) < f_j(x)$, причем $f_j(y) \leqslant f_i(x)$. Но при переходе от x к y могут измениться лишь те φ_S, у которых $i \in S$. Следовательно, $f_i(x) \geqslant f_j(y) \geqslant f_i(y)$ — противоречие.

Более формально, предположив, что $f_i(y) > f_i(x)$, определим w^* равенством (1) и возьмем $j \in I(y, w^*) \diagdown I(x, w^*)$ и $S \in \Sigma$, для которой $f_j(y) = \varphi_S(y^S)$ при $j \in S$. Если $i \notin S$, то $x^S = y^S$ и $f_j(x) \leqslant \varphi_S(y^S) = f_j(y)$ в противоречие с выбором j. Если же $i \in S$, то $f_i(y) \leqslant \varphi_S(y^S) \leqslant w^*$, что противоречит лемме 1.

Следствие. Для любого вектора φ справедливо $\mathrm{NE}(\varphi)\cap\mathrm{PO}(\varphi)\neq\varnothing$.

Разумеется, паретовское равновесие как таковое может рассматриваться как возможный компромиссный исход. Отметим, однако, что в общем случае паретовских равновесий может быть несколько, с разными значениями выигрышей и среди них может не быть ни одного сильного равновесия.

Пример 1. $N=\{1,2\}$, $X_1=X_2=\{1,2\}$, $\Sigma=\{N,\{1\},\{2\}\}$, $\varphi_i(i)=3$, $\varphi_i(j)=1$ $(i,j=1,2,\ i\neq j)$, $\varphi_N(1,1)=\varphi_N(2,2)=2$, $\varphi_N(1,2)=\varphi_N(2,1)=-1$. Выигрыши игроков заполняют матрицу (x_1 — номер строки, x_2 — номер столбца)

$$\begin{Vmatrix} (2,1) & (-1,-1) \\ (-1,-1) & (1,2) \end{Vmatrix}$$

Получается известный пример — игра «семейный спор» [10], когда имеются две несравнимые паретовские ситуации равновесия, обе принадлежащие N-ядру.

Пример 2. Пусть $N=\{1,2,3\}$, $X_1=[0,1]$, $X_2=X_3=\{0\}$ (можно отождествить X и X_1), $\Sigma=\{N,\{1\},\{1,2\}\}$, $\varphi_1(x_1)\equiv0$, $\varphi_{12}(x_1)=x_1$, $\varphi_N(x_1)=2-x_1$. Игроки 2 и 3 здесь «полуфиктивные» (у них есть выигрыши, но нет стратегий), что сделано для упрощения примера. Имеем $\mathrm{Nucl}(\varphi)=\{1\}$, $\mathrm{NE}(\varphi)=[0,1]$, $\mathrm{SE}(\varphi)=\varnothing$. Любой исход $x_1\neq0$ хуже для коалиции $\{1,3\}$, чем $x_1=0$; любой исход $x_1\neq1$ хуже для коалиции $\{1,2\}$, чем $x_1=1$.

Нетрудно понять, что отсутствие сильных равновесий в этом примере связано с постоянством функции φ_1. Если, например, сделать ее возрастающей (изменив ее при этом сколь угодно мало), то исход $x_1=1$ станет сильным равновесием. Оказывается, что это — общий факт. Сколь угодно малым изменением любого заданного вектора φ можно добиться, чтобы $\mathrm{SE}(\varphi)\neq\varnothing$. Более того, в некотором смысле ситуация $\mathrm{SE}(\varphi)\neq\varnothing$ является более типичной. Напомним, что подмножество метрического пространства называется множеством первой категории, если оно является счетным объединением нигде не плотных множеств. Множества первой категории являются в определенном смысле «малыми» [11]. Покажем, что векторы φ, для которых $\mathrm{SE}(\varphi)=\varnothing$, образуют множество первой категории. Если же все множества X_i конечны, то это множество является просто нигде не плотным.

Лемма 2. *Если $x\in\mathrm{Nucl}(\varphi)\setminus\mathrm{SE}(\varphi)$, $I\subset N$, y^I — выгодное для коалиции I отклонение от исхода x, $y=x\|y^I$, то найдется $k\in I$, для которого $y_k\neq x_k$, $f_k(y)=f_k(x)$.*

Поскольку $f(y)\neq f(x)$, определим w^* равенством (1) и выберем $j\in I(y,w^*)\setminus I(x,w^*)\neq\varnothing$. Обозначим $I^0=\{i\in I\,|\,y_i\neq x_i\}$. Пусть $f_j(y)=\varphi_S(y^S)$ для $j\in S\in\Sigma$; тогда $S\cap I^0\neq\varnothing$ (иначе имели бы $x^S=y^S$, $f_j(x)\leqslant\varphi_S(x^S)=f_j(y)$). Для $k\in S\cap I^0$ имеем $f_k(y)\geqslant f_k(x)$ и $f_k(y)\leqslant\varphi_S(y^S)\leqslant w^*$, откуда $f_k(y)=f_k(x)$ по лемме 1. Лемма доказана.

Теорема 2. *Если все множества X_i конечны, то множество $\{\varphi\in\Phi\,|\,\mathrm{Nucl}(\varphi)\subseteq\mathrm{SE}(\varphi)\}$ содержит открытое всюду плотное подмножество пространства Φ* (другими словами: $\mathrm{Nucl}(\varphi)\subseteq\mathrm{SE}(\varphi)$ *для векторов φ «общего положения»*).

Действительно, векторы φ, для которых каждая функция φ_S, $S\in\Sigma$, взаимно-однозначна на X^S и множества значений функций φ_S при разных $S\in\Sigma$ не пересекаются, образуют открытое всюду плотное подмножество пространства Φ, а для таких векторов φ утверждение леммы 2 не может иметь места.

Для бесконечных множеств X_i утверждение теоремы 2 становится, вообще говоря, неверным. Множество векторов φ, для которых $\mathrm{SE}(\varphi)=\varnothing$, может быть плотным в обширных областях пространства Φ.

Теорема 3. *Множество* $\{\varphi\in\Phi\,|\,\mathrm{Nucl}(\varphi)\setminus\mathrm{SE}(\varphi)\neq\varnothing\}\supseteq\{\varphi\in\Phi\,|$ $|\,\mathrm{SE}(\varphi)=\varnothing\}$ *является множеством первой категории.*

Введем вспомогательное понятие ε-ослабленного сильного равновесия. Так будем называть исход $x\in X$, отклонение от которого любой коалиции либо уменьшает выигрыш хотя бы одного из отклоняющихся, либо не дает ни одному из них увеличения выигрыша, не меньшего ε. Формально говоря, будем для каждого $\varepsilon>0$ рассматривать множество

$$\mathrm{WSE}_\varepsilon(\varphi)=\{x\in X\,|\,\forall I\subseteq N\ [\ (\forall i\in I\ f_i(x\|y^I)\geqslant f_i(x))\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(\forall i\in I\ f_i(x\|y^I)<f_i(x)+\varepsilon)]\}.$$

Обозначим $W(\varepsilon)=\{\varphi\in\Phi\,|\,\mathrm{Nucl}(\varphi)\subseteq\mathrm{WSE}_\varepsilon(\varphi)\}$. Легко видеть, что

$$\{\varphi\in\Phi\,|\,\mathrm{Nucl}(\varphi)\subseteq\mathrm{SE}(\varphi)\}=\bigcap_{\varepsilon>0}W(\varepsilon),$$

поэтому достаточно показать, что дополнение к каждому множеству $W(\varepsilon)$ нигде не плотно в Φ.

Покажем, что в любой окрестности любого вектора $\varphi^0\in\Phi$ найдется вектор φ^r, обладающий следующими свойствами:

1) $\mathrm{Nucl}(\varphi^r)=\{x\}\subseteq\mathrm{SE}(\varphi^r)$,
2) отображение $\varphi\mapsto\mathrm{Nucl}(\varphi)$ непрерывно при $\varphi=\varphi^r$,
3) $\varphi^r\in\mathrm{Int}(W(\varepsilon))$ для любого $\varepsilon>0$.

Свойство 3) и означает нигде не плотность дополнения к $W(\varepsilon)$. Для доказательства теоремы остается реализовать намеченную схему.

Пусть $\varphi^0\in\Phi$, $x\in\mathrm{Nucl}(\varphi^0)$, $r>0$; определим вектор φ^r равенствами $\varphi_S{}^r(y^S)=\varphi_S{}^0(y^S)-r\rho_S(x^S,y^S)$, $S\in\Sigma$. Ясно, что $f_i{}^r(y)\leqslant f_i{}^0(y)$ для всех $y\in X$, $i\in N$, причем если $f_i{}^0(y)=f_i{}^r(y)$, $r>0$, то $y_i=x_i$.

Лемма 3. *При любом* $r>0$ *справедливо* $\mathrm{Nucl}(\varphi^r)=\{x\}$.

Действительно, для любого $y\in X$, $y\neq x$ вектор $f^0(y)$ лексикографически не лучше $f^0(x)$, а $f^r(y)$ доминируется по Парето вектором $f^0(y)$, поэтому $f^0(x)=f^r(x)$ лексикографически лучше $f^r(y)$.

Лемма 4. *При любом* $r>0$ *справедливо* $x\in\mathrm{SE}(\varphi^r)$.

Действительно, если y^I является выгодным для коалиции I отклонением от исхода x при выигрышах f^r, то тем более отклонение y^I выгодно для коалиции I при выигрышах f^0. По лемме 2, найдется $k\in I$, для которого $y_k\neq x_k$, $f_k{}^0(x\|y^I)=f_k{}^0(x)$, откуда $f_k{}^r(x\|y^I)<f_k{}^r(x)$, что противоречит выгодности для коалиции I отклонения y^I при выигрышах f^r.

Лемма 5. *Для любых* $r>0$, $\delta>0$ *найдется такое* $\eta>0$, *что при* $\|\varphi-\varphi^r\|<\eta$ *справедливо* $\mathrm{Nucl}(\varphi)\subseteq O(x,\delta)$, *где* $O(x,\delta)$ *— открытый шар радиуса* δ *с центром в точке* x.

Предположим, что это не так; тогда при некотором $\delta_0>0$ для сколь угодно близкого к φ^r вектора φ найдется исход $z\in\mathrm{Nucl}(\varphi)$, $z\notin O(x,\delta_0)$. Взяв с учетом компактности множества X предельную точку, получим, что существует исход $y\neq x$, для которого при любых $\eta,\delta>0$ найдутся такие вектор φ и исход $z\in\mathrm{Nucl}(\varphi)$, что $\|\varphi-\varphi^r\|<\eta$, $\rho(y,z)<\delta$.

Введем обозначения:

$$C=\{i\in N\,|\,y_i=x_i\},$$
$$M_i(z)=\{S\in\Sigma\,|\,i\in S\,\&\,f_i{}^0(z)=\varphi_S{}^0(z)\}\ (z\in X,\ i\in N),$$
$$S_i(z)=\bigcup_{S\in M_i(z)} S.$$

Легко видеть, что если $f_i{}^0(y)=f_i{}^r(y)$, то $S_i(y)\subseteq C$.

Предположим без ограничения общности, что $f_1{}^0(x)\leqslant\ldots\leqslant f_n{}^0(x)$. Поскольку, по лемме 3, $\mathrm{Nucl}\,(\varphi^r)=\{x\}$, то найдется взаимно-однозначное отображение σ: $N\to N$, для которого $f^r_{\sigma(1)}(y)\leqslant\ldots\leqslant f^r_{\sigma(n)}(y)$ и $f_1{}^r(x)=f^r_{\sigma(1)}(y),\ldots$ $\ldots, f^r_{k-1}(x)=f^r_{\sigma(k-1)}(y), f_k{}^r(x)>f^r_{\sigma(k)}(y)$ для некоторого $k\in N$. Обозначим $I=\{1, 2,\ldots, k-1\}$; поскольку $x\in\mathrm{Nucl}\,(\varphi^0)$, то для всех $i\in I$ выполняется $f_i{}^0(x)=f^r_{\sigma(i)}(y)=f^0_{\sigma(i)}(y)$, откуда $S_{\sigma(i)}(y)\subseteq C$.

Предполагая, что $k>1$, разобьем множество I на группы $I_t(x)$ так, чтобы для $i, j\in I_t(x)$ иметь $f_i{}^0(x)=f_j{}^0(x)$, а для $i\in I_t(x)$, $j\in I_{t+1}(x)$ иметь $f_i{}^0(x)<f_j{}^0(x)$. Аналогичным образом разобьем на группы $I_t(y)$ по значениям $f_i{}^0(y)=f_i{}^r(y)$ множество σI. Ясно, что $I_t(y)=\sigma I_t(x)$. Пусть $j\in I_1(y)$; тогда $f_j{}^r(x)\leqslant f_j{}^r(y)$, поскольку $S_j(y)\subseteq C$. Но значение $f_j{}^r(y)$ минимально, следовательно, $f_j{}^r(x)=f_j{}^r(y)$, $j\in I_1(x)$, $S_j(x)\subseteq I_1(x)$. Имеем $I_1(x)=I_1(y)$, σ можно считать тождественным на $I_1(x)$, $S_i(x)=S_i(y)$ для всех $i\in I_1(x)$. Пусть теперь $j\in I_2(y)$; из $S_j(y)\subseteq C$ получаем $f_j{}^r(x)\leqslant f_j{}^r(y)$. Если бы $j\in I_1(x)$, то, как уже установлено, было бы $j\in I_1(y)$, поэтому $j\in I_2(x)$, $S_j(x)\subseteq I_1(x)\cup I_2(x)$. Имеем $I_2(x)=I_2(y)$, σ можно считать тождественным на $I_2(x)$, $S_i(x)=S_i(y)$ для всех $i\in I_2(x)$. Пройдя аналогичным образом по всем группам $I_t(y)$, получаем, что для каждого $i\in I$ справедливо $f_i{}^0(x)=$ $=f_i{}^0(y)=f_i{}^r(y)$, $S_i(x)=S_i(y)$.

Выберем теперь η и δ столь малыми, чтобы при $\|\varphi-\varphi^r\|<\eta$ для $a=x, y$, S, $T\in\Sigma$, $z\in X$ из условий $\varphi_S{}^r(a^S)<\varphi_T{}^r(a^T)$, $\rho(a, z)<\delta$ вытекало неравенство $\varphi_S{}^r(z^S)<\varphi_T{}^r(z^T)$, а из условия $\rho(y, z)<\delta$ вытекало $f_k(z)<f_k(x\|z^I)$ (здесь уже допущен и вариант $k=1$, $I=\varnothing$, когда $x\|z^I=x$). Если при таких η и δ выполняются неравенства $\|\varphi-\varphi^r\|<\eta$, $\rho(y, z)<\delta$, то получаем $f_i(z)=f_i(x\|z^I)$ для всех $i\in I$, $f_k(z)<f_k(x\|z^I)$, откуда вектор $f(x\|z^I)$ лексикографически лучше вектора $f(z)$, что противоречит условию $z\in\mathrm{Nucl}\,(\varphi)$. Лемма доказана.

Лемма 6. *Для любых* $r>0$, $\varepsilon>0$ *найдется такое* $\rho_0>0$, *что* $O(\varphi^r, \rho_0)\subseteq$ $\subseteq W(\varepsilon)$.

Для каждых $I\in 2^N\setminus\{\varnothing\}$, $z\in X$ обозначим

$$Y_I(z)=\{y^I\in X^I\,|\,\max_{i\in I}\,[f_i{}^r(z\|y^I)-f_i{}^r(z)]\geqslant\varepsilon/3\},$$

$$\gamma(z)=\min_{I\subseteq N_y}\ \min_{I\in Y^I(z)}\ \max_{i\in I}\,[f_i{}^r(z)-f_i{}^r(z\,\|\,y^I)].$$

По лемме 4, $x\in\mathrm{SE}(\varphi^r)$, поэтому $\gamma(x)>0$. Нетрудно видеть, что отображение Y_I полунепрерывно сверху, поэтому функция γ полунепрерывна снизу. По лемме 5, можно выбрать $\eta>0$ так, чтобы при любых $\varphi\in$ $\in O(\varphi^r, \eta)$, $z\in\mathrm{Nucl}\,(\varphi)$ выполнялось $\gamma(z)>\gamma(x)/2$. Положим $\rho_0=\min\,[\varepsilon/3,$ $\eta,\ \gamma(x)/4]$.

Пусть $\varphi\in O(\varphi^r, \rho_0)$, $z\in\mathrm{Nucl}\,(\varphi)$. Возьмем произвольную коалицию I и $y^I\in X^I$. Если $y^I\notin Y^I(z)$, то для любого $i\in I$ имеем $f_i{}^r(z\|y^I)<f_i{}^r(z)+\varepsilon/3$,

откуда $f_i(z\|y^I)<f_i(z)+\varepsilon$; если же $y^I\in Y^I(z)$, то найдется $i\in I$, для которого $f_i^r(z)\geqslant f_i^r(z\|y^I)+\gamma(z)>f_i^r(z\|y^I)+\gamma(x)/2$, откуда $f_i(z)>f_i(z\|y^I)$. В итоге получаем $z\in\mathrm{WSE}_\varepsilon(\varphi)$.

Лемма доказана, а с ней и теорема.

§ 3. Двухуровневые игры

На протяжении этого параграфа будем предполагать дополнительно, что для любого $S\in\Sigma$ либо $S=N$, либо $S=\{i\}$ при $i\in N$. (Естественно полагать, что $N\in\Sigma$, в противном случае игра распадается и не заслуживает внимания.)

Теорема 4. *Для любого вектора* φ *справедливо включение* $\mathrm{Nucl}(\varphi)\subseteq\mathrm{SE}(\varphi)$.

В самом деле, пусть $x\in\mathrm{Nucl}(\varphi)$, $I\subseteq N$, $y^I\in X^I$, $y=x\|y^I$. Предположим, что $f_j(y)\geqslant f_j(x)$ для всех $j\in I$ и найдется номер $i\in I$, для которого $f_i(y)>f_i(x)$. Тогда $f(y)\neq f(x)$ и можно определить w^* равенством (1); для $k\in I(y,w^*)\setminus I(x,w^*)\neq\varnothing$ обязательно $k\notin I$, следовательно, $x_k=y_k$. Отсюда $w^*=f_k(y)=\varphi_N(y)\geqslant f_i(y)$, т. е. $i\in I(y,w^*)$, что противоречит лемме 1.

Пример 1 показывает, что существование сильного равновесия не устраняет, вообще говоря, проблемы выбора совместного решения, поскольку разным участникам могут быть выгодны разные равновесия. Можно указать условия, при которых этого не происходит.

Будем называть вектор φ регулярным, если для каждого $\{i\}\in\Sigma$ функция φ_i удовлетворяет хотя бы одному из приведенных ниже условий. Если каждая функция φ_i удовлетворяет условию 2, то такой вектор φ будем называть сильно регулярным.

Условие 1. Каждый локальный максимум функции φ_i является ее глобальным максимумом.

Условие 2. Если x_i, y_i — точки локального максимума функции φ_i, то для любого $z\in X$ справедливо $\varphi_N(z\|x_i)=\varphi_N(z\|y_i)$.

В случае двухуровневых игр Гермейера — Вателя выполняются оба условия. Если множество X_i выпукло, а функция φ_i вогнута, то выполняется условие 1, если функция φ_i строго вогнута, то выполняется и условие 2. Подчеркнем, что при этом функция φ_N может быть произвольной.

Лемма 7. *Если* $\{i\}\in\Sigma$, *для функции* φ_i *выполнено условие* 1 *или условие* 2, $x\in\mathrm{R}_i(\varphi)$ *и* $\varphi_i(x_i)<\varphi_N(x)$, *то*

$$\varphi_i(x_i)=\max_{y_i\in X_i}\varphi_i(y_i).$$

В самом деле, x_i должно быть точкой локального максимума φ_i, поскольку в противном случае малым изменением x_i можно было бы увеличить φ_i, сохраняя неравенство $\varphi_i<\varphi_N$, тем самым увеличив f_i. Если для φ_i выполнено условие 1, то отсюда сразу вытекает требуемое утверждение. Если же выполнено условие 2, максимум φ_i достигается в точке $y_i\in X_i$ и $\varphi_i(y_i)>\varphi_i(x_i)$, то имеем $f_i(x\|y_i)=\min[\varphi_i(y_i),\ \varphi_N(x\|y_i)]=\min[\varphi_i(y_i),\ \varphi_N(x)]>\varphi_i(x_i)=f_i(x)$, что противоречит условию $x\in\mathrm{R}_i(\varphi)$.

Лемма 8. *Если вектор* φ *регулярен,* $x,y\in\mathrm{NE}(\varphi)$, $\varphi_N(x)\geqslant\varphi_N(y)$, *то* $f_i(x)\geqslant f_i(y)$ *для всех* $i\in N$.

В самом деле, пусть $f_i(y)>f_i(x)$; тогда обязательно $\{i\}\in\Sigma$ и $\varphi_i(x_i)<\varphi_N(x)$. По лемме 7, получаем $\varphi_i(y_i)\leqslant\varphi_i(x_i)$, откуда $f_i(y)=\min[\varphi_i(y_i),\ \varphi_N(y)]\leqslant\min[\varphi_i(x_i),\ \varphi_N(x)]=f_i(x)$ — противоречие.

Таким образом, для регулярного вектора φ предпочтения всех игроков на множестве $\mathrm{NE}(\varphi)$ ситуаций равновесия согласованы в том смысле, что если $x, y \in \mathrm{NE}(\varphi)$, $f_i(x) > f_i(y)$ для некоторого $i \in N$, то обязательно $f_i(x) \geqslant f_i(y)$ для любого $i \in N$.

Теорема 5. *Если вектор φ регулярен, то верно следующее:*

1) *каждая функция f_i ($i \in N$) постоянна на множестве* $\mathrm{PO}(\varphi) \cap \mathrm{NE}(\varphi)$,

2) $\mathrm{Nucl}(\varphi) = \mathrm{SE}(\varphi) = \mathrm{PO}(\varphi) \cap \mathrm{NE}(\varphi)$.

В самом деле, пусть

$$x^* \in \operatorname{Arg} \max_{x \in \mathrm{NE}(\varphi)} \varphi_N(x).$$

По лемме 8, имеем $f_i(x^*) \geqslant f_i(x)$ для всех $i \in N$, $x \in \mathrm{NE}(\varphi)$. Следовательно, $f(x) = f(x^*)$ для любого $x \in \mathrm{NE}(\varphi) \cap \mathrm{PO}(\varphi)$. Отсюда непосредственно вытекает и утверждение 2) теоремы.

Другими словами, для регулярного вектора φ существует единственное (в смысле выигрышей) устойчивое по отношению к любым отклонениям «после» соглашение — выбор исхода из N-ядра. Однако эта единственность сама по себе еще не означает, что указанное соглашение не имеет слабых сторон.

Пример 3. Пусть $N = \{1, 2\}$, $X_1 = X_2 = \{1, 2\}$, вектор $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_N)$ задается матрицей (x_1 — строка, x_2 — столбец)

$$\begin{Vmatrix} (4,3,1) & (4,2,4) \\ (5,3,3) & (5,2,5) \end{Vmatrix}.$$

Тогда матрица выигрышей имеет вид

$$\begin{Vmatrix} (1,1) & (4,2) \\ (3,3) & (5,2) \end{Vmatrix}.$$

В этой игре существует единственное равновесие, оптимальное по Парето ($x_1 = 2$, $x_2 = 1$). Однако если игроку 1 удастся первым зафиксировать свой выбор $x_1 = 1$, то при максимизирующем ответе игрока 2 ($x_2 = 2$) его выигрыш увеличится. По отношению к отклонениям «до» N-ядро оказывается неустойчивым.

Теорема 6 (см. ниже) показывает, что N-ядро для регулярного вектора φ устойчиво и по отношению к отклонениям «до». Если любая коалиция I зафиксирует свой выбор y^I, а оставшиеся игроки выберут любую ситуацию равновесия в фактор-игре, то это не может оказаться выгодным (по сравнению с N-ядром исходной игры) для коалиции I.

Теорема 6. *Если вектор φ регулярен, $x \in \mathrm{Nucl}(\varphi)$, $I \subseteq N$, $y^I \in X^I$, $y^{N \setminus I} \in \mathrm{NE}(\varphi^{y^I})$ и $f_k(y) > f_k(x)$ для некоторого $k \in N$, то найдется $i \in I$, для которого $f_i(y) < f_i(x)$.*

Определим w^* равенством (1) и возьмем $i \in I(y, w^*) \setminus I(x, w^*)$. По лемме 1, имеем $f_k(y) > w^* = f_i(y)$, откуда $\varphi_i(y_i) < \varphi_N(y)$. Если $i \notin I$, то, по лемме 7, получаем противоречие: $f_i(y) = \varphi_i(y_i) \geqslant \varphi_i(x_i) \geqslant f_i(x)$.

Теорема 7. *Если вектор φ сильно регулярен, $x \in \mathrm{Nucl}(\varphi)$, $I \subseteq N$, $y^I \in X^I$, $y^{N \setminus I} \in \mathrm{Nucl}(\varphi^{y^I})$, $f_i(x) \leqslant f_i(y)$ для всех $i \in I$, то $f(x) = f(y)$.*

По теореме 6 получаем, что $f_i(y) \leqslant f_i(x)$ для всех $i \in N$; предположим, что $f_j(y) < f_j(x)$ для некоторого $j \in N$ (тогда обязательно $j \in N \setminus I$). Пусть $\varphi_j(y_j) < \varphi_N(y)$; тогда, по лемме 7, $\varphi_j(y_j)$ — максимум φ_j, откуда $f_j(x) \leqslant \varphi_j(x_j) \leqslant \varphi_j(y_j) = f_j(y)$ — противоречие. Пусть теперь $\varphi_j(y_j) \geqslant \varphi_N(y)$; тогда обязательно $\varphi_N(x) > \varphi_N(y)$. Для любого $i \in I$ из $f_i(x) = f_i(y)$ получаем

$\varphi_i(x_i)<\varphi_N(x)$, откуда, по лемме 7, $\varphi_i(x_i)$ — максимум φ_i, следовательно, $\varphi_i(y_i)=\varphi_i(x_i)$ — тоже максимум. Учитывая условие 2, для любого $k\in N\setminus I$ получаем $f_k(x\|y^I)=\min[\varphi_N(x\|y^I),\ \varphi_k(x_k)]=\min[\varphi_N(x),\ \varphi_k(x_k)]=f_k(x)\geqslant f_k(y)$, причем для $k=j$ неравенство строгое. Это противоречит условию $y^{N\setminus I}\in\in\mathrm{Nucl}(\varphi^{yI})$.

Теорема 8. *Если вектор φ сильно регулярен, $x\in\mathrm{Nucl}(\varphi)$, $I\subseteq N$, $y^{N\setminus I}\in\in\mathrm{Nucl}(\varphi^{xI})$, то $f(x)=f(x\|y^{N\setminus I})$.*

Обозначим $y=x\|y^{N\setminus I}$. Предположим, что $f(x)\neq f(y)$, и определим w^* равенством (1). Возьмем $i\in I(y,\ w^*)\setminus I(x,\ w^*)$. Обязательно должно быть $i\in I$; в противном случае вектор $f^{xI}(x^{N\setminus I})$ оказался бы лексикографически лучше вектора $f^{xI}(y^{N\setminus I})$. Из $y_i=x_i$ получаем тогда $w^*=f_i(y)=\varphi_N(y)<\varphi_N(x)$, откуда $I(y,\ w^*)=N$ и, по лемме 1, $f_j(x)\geqslant f_j(y)$ для всех $j\in N$. Из $y^{N\setminus I}\in\in\mathrm{Nucl}(\varphi^{xI})$ получаем тогда $f_j(x)=f_j(y)<\varphi_N(x)$ для всех $j\in N\setminus I$, откуда, по лемме 7, $\varphi_j(x_j)=\varphi_j(y_j)$ — максимум функции φ_j. Применяя условие 2, имеем $\varphi_N(y)=\varphi_N(x\|y^{N\setminus I})=\varphi_N(x)$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Теоремы 7 и 8 показывают, что при сильно регулярном векторе φ игрокам вообще нет необходимости о чем-либо договариваться. Если установить произвольным образом порядок, в котором игроки будут выбирать свои стратегии, и каждый игрок будет максимизировать свой выигрыш в предположении, что каждый из выбирающих после него промаксимизирует свой, то реализуется исход из N-ядра. То же самое произойдет, если одновременно будут осуществлять свой выбор не отдельные игроки, а какие-то коалиции.

Заменить условие сильной регулярности вектора φ на просто регулярность нельзя.

Пример 4. Пусть $N=\{1,\ 2\}$, $\Sigma=\{N,\ \{1\}\}$, $X_1=[0,\ 1]$, $X_2=\{0\}$, $\varphi_1(x_1)\equiv\equiv0$, $\varphi_N(x_1)=x_1$. Вектор φ регулярен, но не сильно регулярен. Имеем $\mathrm{Nucl}(\varphi)=\{1\}$, $f(\mathrm{Nucl}(\varphi))=\{(0,\ 1)\}$. Выбирая любой $x_1\in X_1$, игрок 1 не изменит своего выигрыша, но может уменьшить (по сравнению с N-ядром) выигрыш игрока 2.

Поскольку здесь можно с равным успехом полагать, что сначала выбирает свою стратегию игрок 1, затем игрок 2 или наоборот, этот пример показывает невозможность ослабить условие сильной регулярности вектора φ и в теореме 7, и в теореме 8.

Условие устойчивости по отношению к отклонениям «до» однозначно формализуется для произвольных игр двух лиц; в [6] множество устойчивых оптимальных по Парето исходов названо γ-ядром. Из уже полученных результатов нетрудно вывести совпадение N-ядра с γ-ядром для регулярных векторов φ.

До конца этого параграфа будем иметь в виду игру двух лиц. Будем использовать соглашение $i,\ j\in\{1,\ 2\}$, $i\neq j$, аргументы функций выигрыша будем всегда снабжать индексами, так что, например, $f_i(x_i,\ x_j)$ следует понимать как $f_i(x_1,\ x_2)$, независимо от значений $i,\ j$. Введем обозначения

$$R_j(x_i)=\{x_j\in X_j\,|\,f_j(x_i,x_j)=\max_{y_j\in X_j}f_j(x_i,y_j)\},$$

$$\gamma_i=\sup_{x_i\in X_i}\ \min_{x_j\in R_j(x_i)}\ f_i(x_i,x_j).$$

Здесь $R_j(x_i)$ — множество оптимальных ответов игрока j на выбор x_i игроком i, γ_i — наибольший гарантированный результат игрока i, если он обладает правом первого хода [5]; γ-ядром называется множество

$$C_\gamma(\varphi)=\{x\in X\,|\,f_i(x)\geqslant\gamma_i,\ i=1,2\}\cap PO(\varphi)$$

(конечно, следовало бы писать также $\gamma_i(\varphi)$ и т. п., но для краткости этого делать не будем).

Теорема 9. *Если $N=\{1, 2\}$ и вектор φ регулярен, то* $C_\gamma(\varphi)=\mathrm{Nucl}(\varphi)$.

Пусть $x\in\mathrm{Nucl}(\varphi)$; по теореме 6, имеем $f_i(x)\geqslant f_i(y)$ для любого $y\in\in R_j(\varphi)$, откуда $f_i(x)\geqslant\gamma_i$, следовательно, $x\in C_\gamma(\varphi)$. Если $f_i(x)=\gamma_i$ для обоих i, то, очевидно, $C_\gamma(\varphi)=\mathrm{Nucl}(\varphi)$ (именно так обстоит дело, если вектор φ сильно регулярен). Пусть $f_i(x)>\gamma_i$; тогда найдется $y_j\in X_j$, для которого $f_j(x)=f_j(x_i, y_j)$, но $f_i(x)>f_i(x_i, y_j)$. Отсюда получаем $f_i(x_i, y_j)=\varphi_N(x_i, y_j)<\varphi_N(x)$, а отсюда $\varphi_j(x_j)<\varphi_N(x)$, и, по лемме 7,

$$f_j(x)=\varphi_j(x_j)=\max_{z_j\in X_j}\varphi_j(z_j)=\max_{z\in X}f_j(z).$$

Таким образом, если $f_i(x)>\gamma_i$ для обоих i, то x — общий максимум функций f_1 и f_2 и $\mathrm{Nucl}(\varphi)=PO(\varphi)=C_\gamma(\varphi)$. Если же, например, $f_1(x)>\gamma_1$, а $f_2(x)=\gamma_2$, то $f_2(x)$ — максимум функции f_2 и для любого $z\in X$ из неравенств $f_i(z)\geqslant\gamma_i$, $i=1, 2$, вытекает $f_2(z)=\gamma_2=f_2(x)$, а отсюда $f_1(z)\leqslant f_1(x)$. Опять-таки получаем $C_\gamma(\varphi)=\mathrm{Nucl}(\varphi)$. Теорема доказана.

Замечания. 1. Как показывает пример 3, условие регулярности вектора φ в теореме 9 существенно.

2. Единственность (в смысле выигрышей) γ-ядра влечет устойчивость N-ядра еще в одном смысле. Представим себе, что один из игроков зафиксировал свой выбор как функцию выбора партнера $x_i=\psi_i(x_j)$. Такую функцию будем называть правдоподобной, если $\psi_i(x_j)\in R_i(x_j)$ для всех $x_j\in X_j$. Из теоремы 9 вытекает, что если игрок i зафиксирует любую правдоподобную функцию ψ_i, а его партнер промаксимизирует свой выигрыш, то игроку i это не даст увеличения выигрыша по сравнению с N-ядром. Аналогичное утверждение может быть доказано и в общем случае, однако ввиду неблагоприятного соотношения между громоздкостью формулировки и существенностью результата не будем его даже формулировать.

§ 4. Регулярные игры

Дадим обобщение понятия регулярного вектора φ для произвольной структуры Σ. Общий характер результатов такой же, как в § 3, хотя доказательства и сами формулировки существенно сложнее.

Для данного вектора φ будем обозначать $\mathrm{Loc\,Nucl}(\varphi)$ и называть локальным N-ядром множество всех таких исходов $x\in X$, что для каждого $i\in N$ найдется такая окрестность $U_i\ni x_i$, что x принадлежит N-ядру игры, задаваемой множествами стратегий $\overline{U}_i$ (замыканиями U_i) и ограничениями на

$$\overline{U}=\prod_{i\in N}\overline{U}_i$$

функций f_i. (Для игры с одним участником $\mathrm{Loc\,Nucl}(\varphi)$ — множество локальных максимумов.)

Для подмножеств $I\subseteq N$ будет рассматривать два условия регулярности.

Условие 3. Справедливо равенство $\mathrm{Loc\,Nucl}(\varphi^I)=\mathrm{Nucl}(\varphi^I)$.

Условие 4. Если x^I, $y^I\in\mathrm{Loc\,Nucl}(\varphi^I)$, то для любых $z\in X$, $S\in\Sigma\setminus\Sigma^I$ справедливо $\varphi_S(z^S\|x^{I\cap S})=\varphi_S(z^S\|y^{I\cap S})$.

По техническим соображениям будем считать условие 4 выполненным и в том случае, если существует $i\in I$, для которого $\Sigma_i{}^I=\varnothing$.

Отметим, что для $I=N$ автоматически выполняется условие 4.

Вообще говоря, каждое из этих условий может выполняться при невыполненном другом. Если все множества X_i, $i\in I$, выпуклы, а функции φ_S, $S\in\Sigma^I$, вогнуты, то для I выполняется условие 3, но не обязательно условие 4; если все функции φ_S к тому же строго вогнуты, то выполняется и условие 4. Для игр Гермейера — Вателя всегда выполняется условие 4, но не обязательно условие 3.

Вектор φ будем называть регулярным, если для каждого $I\subseteq N$ выполняется условие 3 или условие 4, и сильно регулярным, если для каждого $I\subseteq N$ выполняется условие 4.

Ниже в формулировках лемм 9—12, говоря о произвольном w, будем иметь в виду любое такое w, что $I(x, w)\neq\varnothing$.

Лемма 9. *Если $x\in\operatorname{Loc\,Nucl}(\varphi)$, то $x^{I(x,w)}\in\operatorname{Loc\,Nucl}(\varphi^{I(x,w)})$ для любого w.*

Доказательство очевидно.

Лемма 10. *Если $x\in\operatorname{Nucl}(\varphi)$ и для $I(x,w)$ выполнено условие 3 или условие 4, то $x^{I(x,w)}\in\operatorname{Nucl}(\varphi^{I(x,w)})$.*

Если выполнено условие 3, то утверждение леммы 10 непосредственно вытекает из леммы 9. Если выполнено условие 4 и $x^{I(x,w)}\notin\operatorname{Nucl}(\varphi^{I(x,w)})$, то выберем $y^{I(x,w)}\in\operatorname{Nucl}(\varphi^{I(y,w)})$, положим $y=x\|y^{I(x,w)}$ и получим, с учетом леммы 9, что $\varphi_S(y)=\varphi_S(x)$ для $S\not\subseteq I(x, w)$. Отсюда $f_i(y)=f_i(x)$ для $i\notin I(x, w)$ и вектор $f(y)$ лексикографически лучше вектора $f(x)$, что противоречит условию $x\in\operatorname{Nucl}(\varphi)$.

Теорема 10. *Если вектор φ регулярен, то каждая функция f_i постоянна на N-ядре.*

Действительно, пусть x, $y\in\operatorname{Nucl}(\varphi)$, $f(x)\neq f(y)$; определим w^* равенством (1). Отметим, что $f_i(z)\leqslant f_i^I(z^I)$ для всех $z\in X$, $i\in I\subseteq N$, причем $f_i(z)=f_i^{I(z,w)}(z^{I(z,w)})$ для $i\in I(z, w)$. По определению w^* имеем $f_i(x)\leqslant f_i(y)$ для всех $i\in I(x, w^*)$, а по лемме 10 имеем $x^{I(x,w^*)}\in\operatorname{Nucl}(\varphi^{I(x,w^*)})$, откуда $f_i(x)=f_i(y)$ для всех $i\in I(x, w^*)$. По определению w^*, имеем $I(y, w^*)\setminus I(x, w^*)\neq\varnothing$, а отсюда вектор $f^{I(y,w^*)}(x^{I(y,w^*)})$ доминирует по Парето вектор $f^{I(y,w^*)}(y^{I(y,w^*)})$, что противоречит лемме 10, примененной к $y\in\operatorname{Nucl}(\varphi)$ и w^*.

Лемма 11. *Если $y\in\operatorname{SE}(\varphi)$, то $y^{I(y,w)}\in\operatorname{Loc\,Nucl}(\varphi^{I(y,w)})$ для любого w.*

Пусть $w_1<\ldots<w_m$ — все значения $f_i(y)$ для $i\in N$, $m\leqslant n$. Для любого w имеем тогда $I(y, w)=I(y, w_l)$, где $l=\max\{k|w_k\leqslant w\}$. Пусть $y^{I(y,w_l)}\notin\operatorname{Loc\,Nucl}(\varphi^{I(y,w_l)})$; тогда сколь угодно близко к $y^{I(y,w_l)}$ найдется исход $z^{I(y,w_l)}$ с лексикографически лучшим вектором выигрышей. Для некоторого $k\leqslant l$ тогда имеем $f_i^{I(y,w_k)}(z^{I(y,w_k)})\geqslant f_i^{I(y,w_k)}(y^{I(y,w_k)})$ при всех $i\in I(y, w_k)$, причем хотя бы для одного из этих i неравенство строгое. Поскольку для всех $i\in I(y, w_k)$ функции f_i и $f_i^{I(y,w_k)}$ совпадают в окрестности исхода y, отклонение $z^{I(y,w_k)}$ от исхода y оказывается выгодным для коалиции $I(y, w_k)$, что противоречит условию $y\in\operatorname{SE}(\varphi)$.

Следствие. Для любого вектора φ справедливо $\operatorname{SE}(\varphi)\subseteq\operatorname{Loc\,Nucl}(\varphi)$.

Лемма 12. *Если вектор φ регулярен, $y\in\operatorname{SE}(\varphi)$, то $y^{I(y,w)}\in\operatorname{Nucl}(\varphi^{I(y,w)})$ для любого w.*

Предположим противное, и пусть по-прежнему $w_1<\ldots<w_m$ — все значения $f_i(y)$, $i\in N$. Положим $l=\min\{k|y^{I(y,w_k)}\notin\operatorname{Nucl}(\varphi^{I(y,w_k)})\}$. Покажем, что $l<m$, т. е. $I(y, w_l)\neq N$. Действительно, если $y\notin\operatorname{Nucl}(\varphi)$, то возьмем $x\in\operatorname{Nucl}(\varphi)$ и определим w^* равенством (1). По лемме 1, имеем $f_i^{I(y,w^*)}(x^{I(y,w^*)})\geqslant f_i(x)\geqslant f_i(y)=f_i^{I(y,w^*)}(y^{I(y,w^*)})$ для всех $i\in I(y, w^*)$, причем

хотя бы для одного из этих i среднее неравенство строгое. Отсюда $I(y, w^*) \neq N$ (поскольку $y \in \mathrm{PO}(\varphi)$) и $y^{I(y,w^*)} \notin \mathrm{Nucl}(\varphi^{I(y,w^*)})$.

Если теперь для $I(y, w_l)$ выполняется условие 3, то соотношение $y^{I(y,w_l)} \notin \mathrm{Nucl}(\varphi^{I(y,w_l)})$ противоречит лемме 11. Если же для $I(y, w_l)$ выполняется условие 4, то возьмем $x^{I(y,w_l)} \in \mathrm{Nucl}(\varphi^{I(y,w_l)})$. Поскольку $y^{I(y,w_{l-1})} \in \mathrm{Nucl}(\varphi^{I(y,w_{l-1})})$, нетрудно видеть, что $f_i^{I(y,w_l)}(y^{I(y,w_l)}) \leqslant f_i^{I(y,w_l)}(x^{I(y,w_l)})$ для всех $i \in I(y, w_l)$, причем хотя бы для одного из этих i неравенство строгое. По лемме 11 и условию 4, имеем $\varphi_S(y^S \| x^{S \cap I(y,w_l)}) = \varphi_S(y^S)$ для всех $S \not\subseteq I(y, w_l)$, а отсюда $f_i(y \| x^{I(y,w_l)}) \geqslant f_i(y)$ для всех $i \in I(y, w_l)$, причем хотя бы одно из этих неравенств строгое. Это противоречит условию $y \in \mathrm{SE}(\varphi)$. Лемма доказана.

Замечание 3. Требование регулярности вектора φ в этой лемме нельзя, по аналогии с леммой 10, заменить на выполнение условия 3 или условия 4 для $I(y, w)$. Соответствующий пример можно построить, заменив в примере 1 значение функции $\varphi_N(1,1)$ на 3. Тогда будет $\mathrm{Nucl}(\varphi) = \{(1,1)\}$, $\mathrm{SE}(\varphi) = \{(1,1), (2,2)\}$, а условие 4 для $I = N$ выполняется автоматически.

Лемма 13. *Если вектор φ сильно регулярен, $x \in \mathrm{Nucl}(\varphi)$, $I \subseteq N$, $y^I \in X^I$, $y = x \| y^I$, $f(y) \neq f(x)$, то для w^*, определенного равенством* (1), *обязательно $I \cap (I(y, w^*) \setminus I(x, w^*)) \neq \varnothing$.*

Если $I(x, w^*) \neq \varnothing$, то, по лемме 10, имеем $x^{I(x,w^*)} \in \mathrm{Nucl}(\varphi^{I(x,w^*)})$, откуда $f_i(y) = f_i(x)$ для всех $i \in I(x, w^*)$, а отсюда и $y^{I(x,w^*)} \in \mathrm{Nucl}(\varphi^{I(x,w^*)})$. Если $I(y, w^*) \cap I \subseteq I(x, w^*)$, то, по условию 4, получим $f_i(y) = f_i^{I(y,w^*)}(y^{I(y,w^*)}) = f_i^{I(y,w^*)}(x^{I(y,w^*)}) \geqslant f_i(x)$ для всех $i \in I(y, w^*)$, что противоречит определению w^*.

Теорема 11. *Если вектор φ регулярен, то* $\mathrm{SE}(\varphi) \subseteq \mathrm{Nucl}(\varphi)$. *Если вектор φ сильно регулярен, то* $\mathrm{SE}(\varphi) = \mathrm{Nucl}(\varphi)$.

Первое утверждение теоремы 11 является частным случаем леммы 12; второе утверждение непосредственно вытекает из первого и из леммы 13.

Замечания. 4. Вектор φ в примере 2 регулярен, так что условие сильной регулярности в теореме существенно.

5. Множество сильно регулярных векторов φ не является даже всюду плотным в Φ, так что теорема 11 не заменяет в этом смысле теорему 3.

Каждая из лемм 10, 12 обобщает ослабленный вариант леммы 7, однако аналогичное обобщение самой леммы 7 было бы неверным. Более того, в общем случае даже при условиях регулярности нет не только согласованности предпочтений игроков на множестве $\mathrm{NE}(\varphi)$ (ср. лемму 8), но даже и общего максимума (как для игр Гермейера — Вателя, см. [4]).

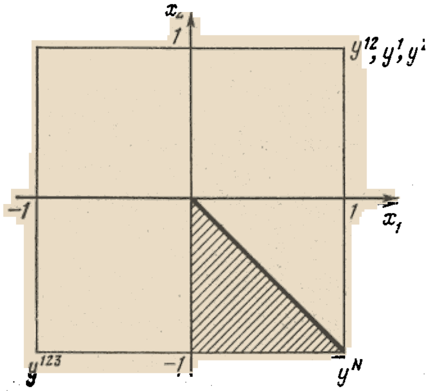
Пример 5. Пусть $N = \{1, 2, 3, 4\}$, $\Sigma = \{N, \{i\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$, $X_i = [-1, 1]$, $i \in N$, $\varphi_S(x^S) = -\rho(x^S, y^S)$, где ρ — евклидова метрика, а $\{y^S\}_{S \in \Sigma}$ — набор фиксированных точек: $y^4 = y_4^N = 0$, $y^3 = y_3^N = y_3^{123} = 0$, $y^i = y_i^{12} = 1$, $y_i^{123} = -1$ $(i = 1, 2)$, $y_1^N = 1$, $y_2^N = -1$. Вектор φ сильно регулярен, и вообще трудно вообразить более «благообразные» функции φ_S. В плоскости $x_3 = x_4 = 0$, где только и происходят события, имеем такую картину (см. фигуру): $\mathrm{Nucl}(\varphi) = \mathrm{SE}(\varphi) = \{(0, 0)\}$, $\mathrm{PO}(\varphi)$ — заштрихованный треугольник, $\mathrm{NE}(\varphi)$ — отрезок $[(0, 0), (-1, -1)]$; все эти равновесия оптимальны по Парето.

Отметим, что «посторонние» равновесия в этом примере выгодны лишь игроку 4, который никаким своим выбором не может способствовать их реализации. Поэтому их наличие не приводит ни к какой неустойчивости N-ядра.

Оставшаяся часть этого параграфа посвящена изучению устойчивости исходов из N-ядра по отношению к отклонениям «до».

Теорема 12. *Если вектор φ регулярен, $x \in \mathrm{Nucl}(\varphi)$, $i \in N$, $y_i \in X_i$, $y^{N \setminus \{i\}} \in \mathrm{Nucl}(\varphi^{y_i})$, то $f_i(y) \leqslant f_i(x)$.*

Пусть $f_i(y) > f_i(x)$; определим w^* равенством (1). По лемме 1, имеем $I(y, w^*) \subseteq N \setminus \{i\}$, $f_j^{I(y,w^*)}(x^{I(y,w^*)}) \geqslant f_j(x) \geqslant f_j(y) = f_j^{I(y,w^*)}(y^{I(y,w^*)})$ для всех $j \in I(y, w^*)$, причем хотя бы для одного из этих j среднее неравенство строгое. Отсюда $y^{I(y, w^*)} \notin \mathrm{Nucl}(\varphi^{I(y, w^*)})$, что противоречит лемме 10, поскольку для любого $S \subseteq I(y, w^*) \subseteq N \setminus \{i\}$ имеем $\varphi_S^{y_i} \equiv \varphi_S$ и, следовательно, подмножество $I(y, w^*)$ удовлетворяет условию 3 или условию 4 для вектора φ^{y_i}.



Теорема 13. *Если вектор φ сильно регулярен, $x \in \mathrm{Nucl}(\varphi)$, $I \subseteq N$, $y^I \in X^I$, $y^{N \setminus I} \in \mathrm{Nucl}(\varphi^{y^I})$, $f_i(y) \geqslant f_i(x)$ для всех $i \in I$, то $f(y) = f(x)$.*

Предположим, что $f(y) \neq f(x)$, и определим w^* равенством (1). Как и при доказательстве теоремы 10, получаем $f_i(x) \geqslant f_i(y)$ для всех $i \in I(y, w^*)$, $y^{I(y, w^*)} \notin \mathrm{Nucl}(\varphi^{I(y, w^*)})$, а также $I(y, w^*) \cap I \subseteq I(x, w^*) \subset I(y, w^*)$, причем $f_i^{I(x,w^*)}(x^{I(x,w^*)}) = f_i(x) = f_i(y) \leqslant f_i^{I(x,w^*)}(y^{I(x,w^*)})$ для всех $i \in I(x, w^*)$, откуда $y^{I(x, w^*)} \in \mathrm{Nucl}(\varphi^{I(x, w^*)})$.

Если $y^{I(y, w^*)} \in \mathrm{Loc\,Nucl}(\varphi^{I(y, w^*)})$, то, взяв $z^{I(y, w^*)} \in \mathrm{Nucl}(\varphi^{I(y, w^*)})$, получим $z^{I(x, w^*)} \in \mathrm{Nucl}(\varphi^{I(x, w^*)})$. Положив $a = y \| z^{I(y, w^*) \setminus I(x, w^*)}$, получим $a^{I(y, w^*)} \in \mathrm{Nucl}(\varphi^{I(y, w^*)})$, откуда $f_j(a) = f_j(y)$ при $j \notin I(y, w^*)$ и вектор $f(a)$ лексикографически лучше вектора $f(y)$, причем $a^I = y^I$. Это противоречит условию $y^{N \setminus I} \in \mathrm{Nucl}(\varphi^{y^I})$.

Если же $y^{I(y, w^*)} \notin \mathrm{Loc\,Nucl}(\varphi^{I(y, w^*)})$, то в любой окрестности $y^{I(y, w^*)}$ найдется $z^{I(y, w^*)}$ с лексикографически лучшим вектором $f^{I(y, w^*)}(z^{I(y, w^*)})$. Раз $y^{I(x, w^*)} \in \mathrm{Nucl}(\varphi^{I(x, w^*)})$, то и $z^{I(x, w^*)} \in \mathrm{Nucl}(\varphi^{I(x, w^*)})$. Положим $a = y \| z^{I(y, w^*) \setminus I(x, w^*)}$; тогда, по условию 4, имеем $f_j^{I(y,w^*)}(a^{I(y,w^*)}) = f_j^{I(y,w^*)}(z^{I(y,w^*)})$ при $j \in I(y, w^*)$, причем исход a может быть выбран сколь угодно близким к исходу y. Отсюда вектор $f(a)$ лексикографически лучше вектора $f(y)$, что противоречит условию $y^{N \setminus I} \in \mathrm{Nucl}(\varphi^{y^I})$, поскольку $a^I = y^I$. Теорема доказана.

Теорема 12 утверждает, что при регулярном векторе φ объявление любым игроком своей стратегии и выбор остальными игроками исхода из N-ядра фактор-игры не могут привести к увеличению выигрыша (по сравнению с N-ядром исходной игры) объявившего игрока. Если вектор φ сильно регулярен, то, согласно теореме 13, аналогичное утверждение справедливо в отношении произвольных коалиций. Просто регулярности для этого недостаточно.

Пример 6. Пусть $N = \{1, 2, 3\}$, $\Sigma = \{N, \{i\}, \{1, 2\}\}$, $X_1 = X_2 = [0, 1]$, $X_3 = \{0\}$, $\varphi_i(x_i) \equiv i - 1$, $\varphi_{12}(x_1, x_2) = \min[-2x_1 + x_2 + 1, -2x_2 + x_1 + 1]$, $\varphi_N(x_1, x_2) = \min[2x_1 - x_2 + 1, 2x_2 - x_1 + 1]$. Вектор φ регулярен, но не сильно регулярен (условие 4 не выполнено, например, для $I = \{1\}$); $\mathrm{Nucl}(\varphi) =$

$=\mathrm{SE}(\varphi)=\{(0, 0)\}$, $f(0, 0)=(0, 1, 1)$. Если же зафиксировать $x_1=1$, то при оптимальном ответе игрока 2 ($x_2=1$) получим $f(1, 1)=(0, 0, 2)$. Для коалиции $I=\{1, 3\}$ такое отклонение «до» оказывается выгодным.

Теорема 14. *Если вектор φ сильно регулярен, $x\in\mathrm{Nucl}(\varphi)$, $I\subseteq N$, $y^{N\setminus I}\in\mathrm{Nucl}(\varphi^{x^I})$, $y=x\|y^{N\setminus I}$, то $f(y)=f(x)$.*

Действительно, если $f(y)\neq f(x)$, то определим w^* равенством (1). Для всех $i\in I(x, w^*)$ имеем $f_i(x)=f_i(y)$, а для $i\in I(y, w^*)\setminus I(x, w^*)$ имеем $f_i(x)>f_i(y)$. По лемме 13 (в применении к коалиции $N\setminus I$), $(N\setminus I)\cap\cap(I(y, w^*)\setminus I(x, w^*)\neq\varnothing$, что противоречит условию $y^{N\setminus I}\in\mathrm{Nucl}(\varphi^{x^I})$, поскольку вектор $f^{x^I}(x^{N\setminus I})$ оказывается лексикографически лучше вектора $f^{x^I}(y^{N\setminus I})$.

Будем называть вектор φ наследственно сильно регулярным, если сам вектор φ и все векторы φ^{x^I}, $I\subseteq N$, $x^I\in X^I$, сильно регулярны. Примеры наследственно сильно регулярных векторов дают игры Гермейера — Вателя и игры с выпуклыми множествами X_i, $i\in N$, и строго вогнутыми функциями φ_S, $S\in\Sigma$, причем в обоих случаях функция φ_N может быть в действительности произвольной. Отметим, что свойство «быть игрой Гермейера — Вателя» не является в этом смысле наследственным.

Теоремы 10, 11, 12, 14 показывают, что при наследственно сильно регулярном векторе φ игроки могут осуществлять свои выборы в произвольном порядке, поодиночке или коалициями и в результате все равно реализуется исход из N-ядра (если кто-то из участников своим выбором сделает реализацию исхода из N-ядра невозможной, то он же, во всяком случае, и пострадает от этого). Если вектор φ сильно регулярен, но не наследственно, то N-ядро в фактор-игре может оказаться неустойчивым и указанный вывод несправедливым.

Пример 7. Пусть $N=\{1, 2, 3\}$, $\Sigma=\{N, \{i\}, \{1, 2\}\}$, $X_1=X_2=[-1, 1]$, $X_3=[0, 1]$, $\varphi_i(x_i)=x_i$, $i=1, 2$, $\varphi_3(x_3)=2-x_3$, $\varphi_{12}(x_1, x_2)=\min[x_2, -2x_1+ +\max[3x_2, -x_2]]$, $\varphi_N(x)=\min[x_2-3x_3+3, -3x_2+5x_3-1]$. Функции φ_i линейны, $\mathrm{Loc\,Nucl}(\varphi^{(1,2)})=\mathrm{Nucl}(\varphi^{(1,2)})=\{(1, 1)\}$, поэтому вектор φ сильно регулярен; $\mathrm{Nucl}(\varphi)=\{(1, 1, 1)\}$, $f(1, 1, 1)=(1, 1, 1)$. При фиксированном $x_1=1$ вектор φ^{x_1} не является регулярным; при $x_3=0$ и оптимальном ответе игрока 2 ($x_2=-1$) получается $f(1, -1, 0)=(-1, -1, 2)$.

В этом примере уже нельзя установить произвольный порядок выбора стратегий x_i и быть уверенным в реализации исхода из N-ядра. Да и соглашение о выборе исхода из N-ядра оказывается неустойчивым по отношению к такому, например, отклонению: игрок 3 может сообщить игроку 2 о своем намерении нарушить соглашение (выбрав $x_3=0$) тайно от игрока 1. Если игрок 2 не имеет возможности войти в переговоры с игроком 1 или каким-то иным образом противостоять попытке захвата права первого хода в фактор-игре, то игроку 3 его нарушение окажется выгодным. Понятно, что при наследственно сильно регулярном векторе φ такое невозможно.

Заключение

Важнейшие результаты настоящей работы можно кратко сформулировать так. Любой исход из N-ядра игры со структурированными функциями выигрыша обязательно является оптимальной по Парето ситуацией равновесия по Нэшу и, «как правило», ситуацией сильного (коалиционного) равновесия. При дополнительных условиях регулярности (если вектор φ наследственно сильно регулярен), справедливых, в частности, для игр Гермейера — Вателя, для игр с выпуклыми множествами X_i и строго вогнутыми функциями φ_s и для двухуровневых игр с унимодальными функциями φ_i, все функции выигрыша постоянны на N-ядре и любой исход из N-ядра устойчив по отношению к любым отклонениям отдельных игроков или коалиций. Если игроки, не заключая даже никакого соглашения, будут выбирать свои стратегии в произвольном порядке в условиях полной информации и каждый игрок будет максимизировать свой выигрыш в предположении, что выбирающие после него игроки промаксимизируют свой, то в результате реализуется исход из N-ядра.

Интересно отметить, что если в определении структурированных функций выигрыша заменить минимум из групповых функций на, скажем, сумму, то можно будет утверждать лишь существование ситуации равновесия (необязательно даже паретовской). Взятие же именно минимума из групповых функций соответствует предположению, что каждая групповая функция очень существенна для участников. Действительно, если неблагополучие на одном объекте угрожает самому существованию данного игрока, то никакое улучшение состояния более благополучных объектов не сможет это компенсировать. С точки зрения простого здравого смысла представляется совершенно естественным, что чем серьезней ситуация, в которой находятся члены данного сообщества, тем скорее они придут к устойчивому соглашению о совместных действиях.

Литература

1. *Моисеев Н. Н., Александров В. В., Тарко А. М.* Человек и биосфера. М.: Наука, 1985.
2. *Гермейер Ю. Б., Ватель И. А.* Игры с иерархическим вектором интересов.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1974, № 3, с. 54—69.
3. *Ватель И. А.* Ядро в игре многих лиц с личными и общественными критериями.— Автоматика и телемехан., 1980, № 1, с. 91—96.
4. *Меньшиков И. С., Меньшикова О. Р.* Сильные ситуации равновесия и N-ядро в играх с иерархическим вектором интересов.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1985, т. 25, № 9, с. 1304—1313.
5. *Гермейер Ю. Б.* Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976.
6. *Мулен Э.* Теория игр. М.: Мир, 1985.
7. *Нэш Дж.* Бескоалиционные игры.— В кн.: Матричные игры. М.: Физматгиз, 1961, с. 205—221.
8. *Aumann R. J.* Acceptable points in general cooperative n-person games.— In: Contributions to the theory of games, IV. Princeton: Princeton Univ. Press, 1959, p. 287—324.
9. *Schmeidler D.* The nucleolus of a characteristic function game.— SIAM J. Appl. Math., 1969, v. 17, № 6, p. 1163—1170.
10. *Льюс Р. Д., Райфа Х.* Игры и решения. М.: Изд-во иностр. лит., 1961.
11. *Куратовский К.* Топология. Т. I. М.: Мир, 1966.

Поступила в редакцию 28.V.198