Глава 2. ИГРЫ В НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ

При изолированном поведении игроков, действующих самостоятельно, не обмениваясь информацией, центральное место занимают игры в нормальной форме. Здесь рассматриваются принципы оптимальности, естественные при изолированном поведении (различные виды доминирования, принцип гарантированного результата), а также антагонистические игры с седловой точкой, для которых изолированное поведение является единственно разумным.

§ 2.1. Нормальная форма и проблема многокритериальности

Игрой в нормальной форме *называется совокупность*

$\Gamma=\langle N,\{U_i\}_{i\in N},\{g_i\}_{i\in N}\rangle$,

где N - множество всех игроков; U_i — множество стратегий i— го игрока; g_i - функция выигрыша i — го игрока, которую он стремится максимизировать.

Обычно игроков нумеруют в произвольном порядке от 1 до n (n — число игроков), поэтому N = {1,2, ...,n}. Стратегия i— го игрока для игры в нормальной форме сводится к одноактному выбору любой точки из множества U_i. Функция выигрыша ставит в соответствие каждому элементу $u=(u_1,...,u_n)$ из множества $U=\prod_{i=1}^{n} U_i$, называемому **исходом** или **ситуацией игры,** действительное число. Таким образом, g_i есть однозначное отображение множества $U\to R$.

Исходная постановка игры в нормальной форме не предполагает никакой дополнительной информации у игроков о действиях друг друга. Поэтому можно считать, что все игроки одновременно и независимо осуществляют выбор своих стратегий, т.е. элементов $u_i\in U_i$. В результате складывается ситуация u, однозначно определяющая выигрыши всех игроков $g_1(u),...g_n(u)$.

Для решения игры необходимо задать принцип оптимальности.

В соответствии с общим определением понятия принципа оптимальности - это отображение (вообще говоря, неоднозначное) игры в множество ее исходов, в данном случае $\Gamma\ \to\ U$. Таких отображений можно задать сколько угодно, но желательно их связывать с некоторыми представлениями игроков о разумном поведении (выгодностью, устойчивостью, справедливостью и т.д.). Формулировка таких представлений является сложной проблемой, но без них в выборе понятия решения остается полный произвол.

Аналогичные вопросы возникают в задаче принятия решений в условиях многокритериальности, когда имеется ряд показателей эффективности выбираемого решения, желательность максимизации (или минимизации) которых не вызывает сомнения, но нет четких представлений о виде общего критерия, т.е. единого показателя. Например, при проектировании конструкции автомобиля желательно, чтобы он был высоконадежным и долговечным, простым и удобным в эксплуатации, скоростным, экономичным, дешевым, красивым и т.д. Однако эти требования в целом противоречивы, поэтому предложить единый показатель качества конструкции очень непросто. А без него трудно сравнивать различные модели и выбирать наилучшую. Такая ситуация является весьма типичной на практике. Поэтому проблема выбора решения в условиях многокритериальности является очень важной. Эта проблема тесно связана с играми.

Предположим, что игроки выбирают стратегию сообща или предоставляют это право некоторому арбитру. Таким образом, имеется возможность непосредственного выбора любого исхода u из множества U . Оценка же исхода дается вектором критериев эффективности $(g_1(u),...g_n(u))$. Как теперь сравнивать между собой исходы? Один может быть лучше по одним критериям, другой - по другим. Понятие же оптимальности снова неоднозначно.

Полная ясность с понятием оптимальности имеется лишь в частном случае игры Γ или задачи принятия решений, когда $n = 1$. Если имеется один игрок или один критерий у лица, принимающего решение, то естественный принцип оптимальности заключается в максимизации выигрыша, т.е. отображает множество стратегий и функцию выигрыша в множество точек максимума этой функции на данном множестве.

При наличии нескольких игроков их выигрыши зависят от действий других и, стремясь к увеличению своего выигрыша, они могут уменьшать выигрыши остальных, а, главное, такое примитивное индивидуальное поведение может привести и к собственным плохим результатам. При наличии нескольких критериев стремление к увеличению одного также может приводить к уменьшению других и делать общий результат неприемлемым.

При анализе проблемы оптимальности в задаче принятия решений в условиях многокритериальности можно использовать два подхода, на первый взгляд различных, но при более детальном рассмотрении тесно связанных между собой. Один основан на введении некоторого единого критерия эффективности, представляющего собой некоторую свертку исходного вектора критериев. Общий вид свертки

$g_0(u)=f(g_1(u),...g_n(u))$,

где f- некоторая функция.

Функция f может быть произвольной, но на практике используется сравнительно небольшое число разумных видов сверток. Среди них можно выделить две, которые нам понадобятся в дальнейшем. Это - суммирование с весовыми коэффициентами

$$g_0(u)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i g_i(u) \qquad \textbf{(2.1)}$$

и оценка по худшему значению частных критериев (с учетом весовых коэффициентов)

$$g_0(u)=\min_{1\le i\le n}\lambda_i g_i(u) \qquad \textbf{(2.2)}$$

Весовые коэффициенты обычно удовлетворяют условию нормировки

$$\lambda_i \ge 0, \quad i=\overline{1,n}\,, \quad \sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1.$$

Они отражают важность критериев или осуществляют перевод в единый измеритель или масштаб.

Свертка **(2.1)** используется в том случае, когда частные критерии являются взаимозаменяющими, т.е. уменьшение одного может компенсироваться увеличением другого, свертка **(2.2) -** в случае, когда частные критерии не являются взаимозаменяющими (уменьшение одного из них не может быть компенсировано увеличением другого).

Другой подход основан на введении понятий доминирования для векторов. Такие понятия можно вводить по-разному, однако практически используются всего несколько.

Определение 2.1. *Вектор* $z=(z_1,...,z_n)$ *строго доминирует вектор* $y=(y_1,...,y_n)$, *если* $z_i>y_i$, $i=\overline{1,n}$.

Определение 2.2. *Вектор* $z=(z_1,...,z_n)$ *доминирует вектор* $y=(y_1,...,y_n)$, *если* $z_i \ge y_i$, $i=\overline{1,n}$ *. Если при этом хотя бы для одного индекса* i_0 *неравенство строгое, т. е.* $z_{i_0} > y_{i_0}$, *то вектор* z *истинно доминирует вектор* y.

На этих определениях основаны наиболее распространенные понятия оптимальности в терминах векторов критериев.

Определение 2.3. *Точка* u^0 *называется полуэффективной (или оптимальной по Слейтеру), если не существует такой точки* $u \in U$, *что вектор* $(g_1(u),\dots g_n(u))$ *строго доминирует вектор* $(g_1(u^0),\dots g_n(u^0))$.

Определение 2.4. *Точка* u^0 *называется эффективной (или оптимальной по Парето), если не существует такой точки* $u \in U$, *что вектор* $(g_1(u),\dots g_n(u))$ *истинно доминирует вектор* $(g_1(u^0),\dots g_n(u^0))$.

Определения 2.3 и 2.4 предъявляют естественные требования к разумным решениям, связанные с неулучшаемостью их сразу по всем критериям (или по частям критериев без ухудшения остальных). Имеются и другие принципы оптимальности в многокритериальных задачах, однако они связаны с теми или иными дополнительными предположениями и не имеют такого универсального характера.

Определения оптимальности на основе доминирования при некоторых условиях эквивалентны введению единого критерия. Далее нам понадобятся следующие понятия.

Множество U *называется выпуклым, если* $\forall u', u'' \in U$ *и* $\alpha \in [0,1]$ *точка* $u=\alpha u'+(1-\alpha)u'' \in U$. *Функция* $f(u)$ *называется выпуклой на выпуклом множестве* U, *если*

$$f(\alpha u'+(1-\alpha)u'') \le \alpha f(u')+(1-\alpha)f(u'') \qquad (2.3)$$

Если неравенство (2.3) строгое при $u' \ne u''$, $\alpha \in (0,1)$, *то функция* $f(u)$ *называется строго выпуклой. Если в (2.3) имеет место обратное неравенство, то функция* $f(u)$ *называется вогнутой (при строгом неравенстве - строго вогнутой).*

Теорема Карлина [7]. *Если частные критерии* $g_i(u)$ *вогнуты на выпуклом множестве* U, *то для любой эффективной точки* u^0 *существуют такие весовые коэффициенты* λ_i, *что* u^0 *доставляет максимум функции (2.1) на множестве* U *при подстановке в нее данных* λ_i.

Доказательство. Рассмотрим множество n-мерных векторов

$Z=\{z/z_i=g_i(u)-g_i(u^0),\ i=\overline{1,n},\ u \in U\}$

и его выпуклую оболочку coZ (наименьшее выпуклое множество, содержащее Z). Из условия вогнутости $g_i(u)$ на выпуклом U и эффективности точки u^0 следует, что coZ не содержит внутренних точек неотрицательного ортанта R_+^n n-мерного евклидова пространства. Используем теорему о разделяющей гиперплоскости: если есть два выпуклых множества, не имеющих общих внутренних точек, то можно построить гиперплоскость такую, что эти множества лежат в разных полупространствах, определяемых этой гиперплоскостью. Так как гиперплоскость задается уравнением $<a,z>=d$, где a- вектор нормали, d-скаляр, то существуют такие вектор $a \neq 0$ и число d, что

$$<a,z_1> \leq d \leq <a,z_2> \quad \forall z_1 \in Z, z_2 \in R_+^n.$$

Вектор a, очевидно, неотрицателен, так как если $a_i<0$, то, выбирая такую последовательность $z_k \in R_+^n$, что $z_k^i \to \infty$, $z_k^j=0$, $j \neq i$, получим $<a,z_k> \to -\infty$, что противоречит предыдущему неравенству. Положим $\lambda_i = \frac{a_i}{\sum_{j=1}^n a_j}$, тогда $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

Так как начало координат принадлежит R_+^n, то $<a,z_i> \leq 0 \quad \forall z_1 \in Z$, откуда $\forall u \in U$ выполняется неравенство $\sum_{i-1}^n \lambda_i g_i(u) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(u^0)$, что и требовалось доказать.

Теорема Гермейера. *Если u^0- эффективная точка и $g_i(u^0)>0$, $i=\overline{1,n}$, то существуют такие весовые коэффициенты λ_i, что u^0 доставляет максимум функции (2.2) на множестве U при подстановке в нее λ_i.*

Доказательство. Положим $\mu_i = \frac{1}{g_i(u_0)}$, $\lambda_i = \frac{\mu_i}{\sum_{j=1}^n \mu_j} \geq 0$ $\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1\right)$ и введем с данными весовыми коэффициентами $\lambda_i, i=\overline{1,n}$ по формуле (2.2) единый критерий эффективности. Тогда $g_0(u^0)=\frac{1}{\sum_{i=1}^n \mu_i}$. Так как u^0- эффективная точка, то $\forall u \in U$ существует i_1; такое, что $g_{i_1}(u) \leq g_{i_1}(u^0)$. Поэтому

$$g_0(u) \leq \frac{\mu_{i_1} g_{i_1}(u)}{\sum_{j=1}^n \mu_j} \leq \frac{\mu_{i_1} g_{i_1}(u^0)}{\sum_{j=1}^n \mu_j} = g_0(u^0),$$

что и требовалось доказать.

• **Замечание.** Условие положительности значений критериев в точке u^0 формально и легко может быть достигнуто в общем случае добавлением к критериям соответствующих положительных констант, что, очевидно, приводит к эквивалентной задаче (результаты сравнения решений не меняются).Таким образом, оптимальные по Парето точки могут получаться как обычные точки максимума общего критерия, вводимого с помощью одного из двух перечисленных выше методов свертки критериев эффективности. Как правило, эффективных точек для векторов критериев оказывается много, фиксация весовых коэффициентов в (2.1) и (2.2) соответствует выделению единственной такой точки. *Множество значений вектора критериев, соответствующее всем эффективным точкам, называется множеством Парето.* Если в пространстве критериев изобразить область возможных значений вектора критерив, являющуюся отображением области определения *U*, то множество Парето является ее "северо-восточной" границей. На рис. 2.1 для случая двух критериев множество Парето представляет собой участок границы *AB*.

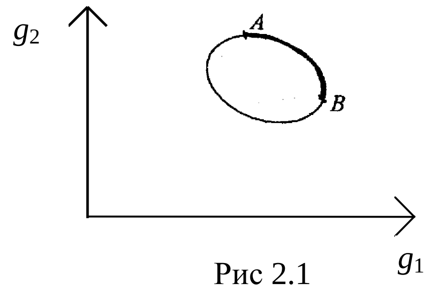

Рис 2.1

Свертка (2.1) несколько предпочтительней свертки (2.2) при вычислении, так как (2.2) приводит фактически к максиминной задаче. Однако в отличие от (2.1) максимизация свертки (2.2) справедлива как необходимое условие эффективности практически без ограничений. Как достаточное условие эффективности максимизации свертки (2.1) справедлива без учета требований выпуклости и вогнутости (при этом должно быть $\lambda_i > 0$). Точки свертки (2.2) в случае неединственности решения являются полуэффективными точками (дополнительной процедурой из них можно выделить эффективные точки).

§ 2.2. Доминирование стратегий. Принцип гарантированного результата

Рассмотрим возможные принципы оптимальности для игры в нормальной форме при изолированном поведении игроков, когда каждый выбирает свою стратегию независимо от других. Эти принципы оптимальности основаны на тех или иных понятиях доминирования стратегий. Введем обозначения

$$u_{(-i)} = (u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n), \quad U_{(-i)} = \prod_{j \in N \setminus \{i\}} U_j, g_i(u_i, u_{(-i)}) \overset{def}{=} g_i(u).$$

Определение 2.5. *Функция $f_1(u)$ мажорирует функцию $f_2(u)$ на множестве U, если $f_1(u) \geq f_2(u)$ $\forall u \in U$. Если дополнительно $\exists u' \in U$ такое, что $f_1(u') > f_2(u')$, то функция $f_1(u)$ истинно мажорирует функцию $f_2(u)$. Если $f_1(u) > f_2(u)$ $\forall u \in U$, то функция $f_1(u)$ строго мажорирует $f_2(u)$.*

Понятие мажорирования можно вводить для части переменных. При этом достаточно указать, на каком множестве определяется мажорирование. Используя мажорирование функции, можно дать определения доминирования стратегий для игры в нормальной форме Г.

Определение 2.6. *Стратегия u_i игрока i в игре* Г *доминирует (истинно, строго) стратегию v_i, если функция $g_i(u_i,u_{(-i)})$ мажорирует (истинно, строго) функцию $g_i(v_{i,}u_{(-i)})$ на множестве $U_{(-i)}$. При этом говорят, что стратегия v_i доминируется (истинно, строго) стратегией u_i.*

Определение 2.7. *Стратегия v_i игрока i в игре* Г *называется недоминируемой (истинно, строго), если не существует стратегии $u_i \in U_i$, $u_i \neq v_i$, которая ее доминирует (истинно, строго).*

Из двух стратегий при изолированном поведении игроку выгодно выбирать доминирующую, так как при любых действиях остальных игроков она дает ему выигрыш не меньше, чем другая, а возможно и больше. Конечно, при введенном понятии доминирования многие стратегии оказываются несравнимыми, т.е. не доминирующими друг друга.

Множество недоминируемых стратегий игрока i обозначим ND^i, а истинно и строго недоминируемых - ND^i_u, ND^i_c. Очевидны включения

$$ND^i \subseteq ND^i_u \subseteq ND^i_c.$$

Определение 2.8. *Стратегия u_i игрока i в игре* Г *называется доминирующей (истинно, строго), если она доминирует (истинно, строго) любую стратегию $v_i \in U_i, v_i \neq u_i$.*

Множества доминирующих стратегий обозначим соответственно D^i, D^i_u, D^i_c. Очевидны включения $D^i_c \subseteq D^i_u \subseteq D^i \subseteq ND^i_u$. Включение $D^i \subseteq ND^i_u$, вообще говоря, не справедливо, так как при наличии, например, двух эквивалентных стратегий u_i, v_i, для которых $g_i(u_i,u_{(-i)}) = g_i(v_{i,}u_{(-i)})$ $\forall u_{(-i)} \in U_{(-i)}$, обе они принадлежат D^i, но не ND^i (которое пусто, если других стратегий нет).

При изолированном поведении игроку имеет смысл выбирать из множеств доминирующих стратегий, или, учитывая их возможную пустоту, хотя бы из множеств недоминируемых стратегий, которые не пусты при весьма общих условиях (заметим, что для определения этих множеств не нужно даже знать функций выигрыша других игроков). Однако это не значит, что доминирующие стратегии при всех обстоятельствах являются наилучшими. В игре могут существовать исходы, которые выгоднее для всех игроков, чем те, к которым приводит использование доминирующих стратегий. Правда, для достижения таких исходов требуются какие-то способы коллективного выбора.

С введенными понятиями доминирования связаны принципы оптимальности, дающие в качестве решения исходы из доминирующих и недоминированных стратегий. Они обоснованы при изолированном поведении. Поэтому не всегда удобен используемый вместо термина "доминирующая стратегия" термин "абсолютно оптимальная стратегия", так как он может вызвать ошибочное представление о том, что такая стратегия оптимальна при любых условиях протекания игры.

Общих условий непустоты множеств доминирующих стратегий не существует. Так $D^i \neq \varnothing$, если задача $\max\limits_{u_i \in U_i} g_i(u_i, u_{(-i)})$ имеет одно и то же решение $\forall u_{(-i)} \in U_{(-i)}$, что является скорее исключительным случаем. Хотя нетрудно привести и примеры $D^i = D^i_u = ND^i = ND^i_u = \{1\}$, $D^i_c = \varnothing$, $ND^i_c = [0,1]$, i=1,2.имеются, но зато эти множества могут включать много элементов.

Пример 2.1. Для множеств стратегий $U_i = [0,1]$ и функций выигрыша $g_i(u_1,u_2) = u_1u_2$, i = 1,2 множества доминирующих и недоминированных стратегий

$D^i = D^i_u = ND^i = ND^i_u = \{1\}$, $D^i_c = \varnothing$, $ND^i_c = [0,1]$, i=1,2.

Пример 2.2. В игре двух игроков с двумя стратегиями у каждого $U_i = \{0,1\}$, $g_i(0,0) = g_i(1,1) = 0$, $g_i(1,0) = g_i(0,1) = 1$, i=1,2 множества доминирующих и недоминированных стратегий

$D^i = D^i_u = D^i_c = \varnothing$, $ND^i = ND^i_u = ND^i_c = \{0,1\}$, i=1,2.

Можно привести весьма слабое условие непустоты множества ND^i_u, которое по существу представляет собой обобщение множества эффективных точек (оптимальных по Парето).

Лемма 2.1. *Если множества U_i являются компактами (в конечномерных пространствах), $i = \overline{1,n}$, $g_i(u)$ непрерывна по всем переменным, то $ND^i_u \neq \varnothing$.*

Лемма 2.2. *Если D^i непусто, то оно совпадает с ND^i_u.*

Пример 2.3. Пусть $U_i = \{0,1\}$, $g_i(0,0) = g_i(1,1) = 1$, $i = 1,2$, $g_1(0,1) = g_2(1,0) = 0$, $g_1(1,0) = g_2(0,1) = 3$.

В этой игре двух лиц множество $D^i_c = \{1\}$, i = 1,2. Использование игроками строго доминирующих стратегий приводит к исходу (1,1) и выигрышам по 1, в то время как исход (0,0) дает обоим по 2.

Этот пример показывает, что могут быть исходы лучшие для всех игроков, чем те, к которым приводят доминирующие (даже строго) стратегии.

Определение 2.9. *Исход (ситуация) u^0 называется оптимальным по Парето в игре* Г, *если не существует исхода $u \in U$ такого, что вектор $(g_1(u),...,g_n(u))$ истинно доминирует вектор $(g_1(u^0),...,g_n(u^0))$.*

В примере 2.3 исход (0,0) оптимален по Парето, а исход (1,1), к которому приводит использование строго доминирующих стратегий, не является оптимальным по Парето. Для достижения паретооптимального исхода в этом примере необходим совместный выбор. В примере 2.1 оптимальный по Парето исход (1,1) достигается индивидуальным выбором недоминируемых стратегий.

Как отмечалось, единственный естественный принцип оптимальности, состоящий в максимизации функции выигрыша, имеет место в игре с одним игроком. В игре нескольких лиц в нормальной форме такой принцип указать нельзя. Введенные понятия доминирования породили ряд принципов, связанных с выбором того или иного вида доминирования или недоминированности. Но возможны и другие принципы оптимальности. Выбор принципа оптимальности определяется индивидуальными особенностями игрока. Задача же исследователя состоит в формулировке и описании свойств возможных (разумных) принципов.

Принцип гарантированного результата играет важную роль в теории принятия решений. Он связан с оценкой стратегии по наихудшему возможному случаю. Этот принцип весьма гибок и может принимать различную форму в зависимости от имеющейся информации, позволяющей оценить возможные исходы.

Для игры в нормальной форме Г, когда игрок действует изолированно, зная лишь множества стратегий остальных игроков, но не зная их конкретных выборов и даже функций выигрыша, гарантированный результат i-го игрока при выборе стратегий u_i равен

$$g_i^{\Gamma}(u_i) = \inf_{u_{(-i)} \in U_{(-i)}} g_i(u_i, u_{(-i)}). \qquad (2.4)$$

Определение 2.10. *Стратегия u_i^0 называется оптимальной гарантирующей стратегией i-го игрока в игре* Г, *если выполняется условие*

$$\inf_{u_{(-i)} \in U_{(-i)}} g_i(u_i^0, u_{(-i)}) = \sup_{u_i \in U_i} \inf_{u_{(-i)} \in U_{(-i)}} g_i(u_i, u_{(-i)}) = g_i^0 , \qquad (2.5),$$

где g_i^0-максимальный гарантированный результат i-го игрока.

Принцип гарантированного результата (иногда говорят максимального гарантированного результата или максимина) связан с осторожным поведением, основанным только на достоверной информации (в игре Г такая информация заключается в знании множеств стратегий остальных игроков). Максимальный гарантированный результат g_i^0 определен всегда (возможно равен $\pm\infty$), но оптимальная гарантирующая стратегия, удовлетворяющая (2.5), может не существовать.

Лемма 2.3. *Если U_i - компакты ($i=\overline{1,n}$), $g_i(u)$- непрерывная функция, то существует оптимальная гарантирующая стратегия i-го игрока, а*

$$g_i^0=\max_{u_i\in U_i}\min_{u_{(-i)}\in U_{(-i)}} g_i(u_i,u_{(-i)}).$$

Доказательство. В силу непрерывности $g_i(u)$ и компактности $U_{(-i)}$ нижняя грань в (2.4) достигается и функция $g_i^Г(u_i)$ также непрерывна.

Следовательно, существует точка максимума u_i^0 функции $g_i^Г(u_i)$ на компакте U_i, которая и является оптимальной гарантирующей стратегией, и верхняя грань в (2.5) достигается. Что и требовалось доказать.

Обозначим G_i - множество оптимальных гарантирующих стратегий i-го игрока.

Лемма 2.4. *В условиях леммы 2.3 $G_i \cap ND_u^i \neq \varnothing$.*

В примере 2.1 множество $G_i = U_i$ (i=1,2). Среди оптимальных гарантирующих стратегий естественно выбирать недоминируемые $u_1=u_2=1$, приводящие к оптимальному по Парето исходу. В примере 2.3 множество стратеги $G_i = D_c^i=\{1\}$ (i = 1,2). Использование этих стратегий приводит к исходу (1,1), не являющемуся оптимальным по Парето.

Определение 2.12. *Игра в нормальной форме* Г *называется несущественной, если не существует исхода $u\in U$ такого, что вектор ($g_1(u),...,g_n(u)$) истинно доминирует вектор ($g_1^0,...,g_n^0$).*

В несущественной игре использование оптимальных гарантирующих стратегий всеми игроками приводит к исходу, оптимальному по Парето. Если игра не является несущественной, то в любом исходе, оптимальном по Парето, выигрыш не гарантирован, по крайней мере, одному игроку.