

Часть 2

Настоящие конспекты являются продолжением элементарного введения в проблематику математического моделирования, содержащегося в первой части (конспекты 1 — 4). Для освоения материала второй части (конспекты 5 — 9) необходимы начальные сведения из теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Лекции состоят из примеров математических моделей, относящихся к очень разным сферам исследований и практической деятельности.

Как отмечалось во введении к первой части конспектов лекций, ”сверхзадачей” настоящего курса является объяснить студентам, во-первых, что математическое моделирование является наукоемкой технологией, встроенной в исследовательские процессы, в процессы производства и потребления материальных благ так, что ни современная производственная структура ни структура потребления не могут существовать без этой технологии, во-вторых, что математические и гуманитарные средства анализа и прогноза реальных явлений, процессов, систем являются двумя сторонами одной медали.

Лекция 5. Примеры простейших математических моделей. Простейшая модель движения спутника Земли. Проблема идентификации модели движения спутника.

1. Напомним кратко концептуальные понятия, введенные и обсуждавшиеся в первой части лекций. Слово ”модель” трактовалось как нечто, способное дать прогноз каких-либо свойств некоторого явления, процесса, системы. Словосочетание ”математическая модель” трактовалось как совокупность уравнений (соотношений) в которых участвуют характеристики некоторого явления (процесса, системы). Эти характеристики разбиваются на два класса: класс внутренних характеристик модели и класс ее внешних характеристик. Внутренние (прогностические) характеристики модели — это, как правило, те характеристики, которые намереваются узнать, обращаясь к средствам математического моделирования. Внешние характеристики математической модели — это существенно влияющие на внутренние характеристики величины, однако, обратное влияние при некоторых условиях, в пределах некоторой точности, отсутствует.

Модель была названа замкнутой, если при известных значениях ее внешних характеристик ее внутренние характеристики однозначно определяются из уравнений (соотношений) модели. Замкнутые модели, у которых (в пределах приемлемой для практических нужд точности) внутренние характеристики не влияют на внешние позволяют получить прогноз значений внутренних характеристик модели, если удастся измерить или узнать каким-либо образом внешние характеристики этой модели. Такие модели позволяют получить прогноз тех свойств изучаемого явления (процесса,

системы), которые формулируются в терминах характеристик, участвующих в модели (внутренних и внешних). Всякая способная давать прогноз замкнутая модель основана на гипотезе об инвариантности, суть которой состоит в том, что некоторые характеристики существенно влияют на характеристики данного явления (процесса, системы), но обратное влияние при некоторых условиях, в пределах практически приемлемой точности не имеет место.

2. Третьей моделью, иллюстрирующей введенные выше понятия о внешних и внутренних характеристиках математической модели и понятие о замкнутой модели, иллюстрирующей также концептуальные понятия, которые вводятся в данной лекции, будет простейшая модель движения спутника Земли. Для того, чтобы вывести эту модель необходимо вспомнить первый закон Ньютона и его же закон всемирного тяготения.

Эти законы можно трактовать как фундаментальные принципы инвариантности, на которых основаны математические модели механических движений. Пусть \vec{F} — сила, действующая на некоторое тело, \vec{a} — ускорение этого тела, вызываемое силой \vec{F} . Стрелки над вводимыми характеристиками здесь и далее означают, что берется в расчет не только величина данной характеристики, но и ее направление. Первый закон Ньютона состоит в том, что имеет место соотношение $\vec{F} = m\vec{a}$, причем коэффициент пропорциональности для *данного тела* не зависит от силы \vec{F} , т.е. это этот коэффициент является характеристикой этого тела, называемой его массой. Пусть M и m — массы некоторых тел, R — расстояние между телами. Закон всемирного тяготения состоит в том, что на тело с массой M действует сила притяжения \vec{F} , направленная в сторону тела с массой m , на тело с массой m действует сила $-\vec{F}$, т.е. сила, направленная в сторону тела с массой M и имеющая такую же абсолютную величину $|\vec{F}|$, причем величина $\frac{|\vec{F}|R^2}{Mm}$ не зависит ни от масс M и m ни от расстояния R между телами и вообще она не зависит ни от каких характеристик реального мира и является так называемой фундаментальной постоянной, называемой гравитационной постоянной, обозначаемой обычно через G .

Пусть теперь M много больше чем m . Будем считать, что никакие другие силы, кроме гравитационных ни на одно из двух рассматриваемых тел не действуют и тело с массой M в некоторый момент времени t_0 , который будем считать "начальным", неподвижно в некоторой инерциальной системе координат. (Инерциальной называется система координат, в которой тело движется равномерно и прямолинейно, если на это тело не действуют никакие силы.) Поскольку сила притяжения между рассматриваемыми телами по абсолютной величине одна и та же, то абсолютная величина ускорения тела с массой M , вызываемого этой силой много меньше вызываемого этой же силой абсолютной величины ускорения тела с массой m . Поэтому есть основания считать, что тело с массой M неподвижно в любой момент времени, на который будет распространяться выполняемый анализ. Эти основания тем больше, чем меньше величина $\frac{m}{M}$ и чем меньше промежуток времени, на который распространяется анализ. Поместим начало прямоугольной системы координат в центр масс тела с массой M . В этой системе координат первый закон Ньютона для тела с массой m запишется в виде $m\vec{a} = \vec{F}$. Положение тела с массой m в выбранной системе координат характеризуется координатами этого тела x, y, z . Совокупность

этих координат принято обозначать \vec{r} и называть "радиус-вектором". Расстояние $|\vec{r}|$ между телами равняется, очевидно, $(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$. Силу \vec{F} , фигурирующую в правой части равенства $m\vec{a} = \vec{F}$ можно записать теперь в виде $-\frac{GMm\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$. Обозначая проекции ускорения \vec{a} на оси выбранной системы координат через a_x, a_y, a_z равенство $m\vec{a} = \vec{F}$ можно записать в виде трех уравнений:

$$\begin{aligned} a_x &= -GM \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ a_y &= -GM \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ a_z &= -GM \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned}$$

Для того, чтобы определить местоположение спутника единственным образом необходимо знать его местоположение и его скорость в некоторый момент времени t_0 . Поэтому добавив к этим уравнениям соотношения

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0, & v_x(t_0) &= v_{x0} \\ y(t_0) &= y_0, & v_y(t_0) &= v_{y0} \\ z(t_0) &= z_0, & v_z(t_0) &= v_{z0}, \end{aligned}$$

где $v_x(t), v_y(t), v_z(t)$ - проекции скорости на оси выбранной системы координат, получим замкнутую модель движения тела массы m в выбранной системе координат. В этой модели внешними характеристиками являются произведение GM , начальное местоположение x_0, y_0, z_0 тела массы m и его начальная скорость v_{x0}, v_{y0}, v_{z0} . Внутренними характеристиками этой модели являются три функции $x(t), y(t), z(t)$, указывающие где находится тело массы m в момент времени $t > t_0$.

Справедливость утверждения о замкнутости составленной модели достаточно очевидна из следующих утверждений. Поскольку в начальный момент времени t_0 известно положение спутника x_0, y_0, z_0 и его скорость v_{x0}, v_{y0}, v_{z0} то можно вычислить его положение x_1, y_1, z_1 в момент $t_1 = t_0 + \delta t$, где δt — малый промежуток времени, по формулам $x_1 = x_0 + v_{x0}\delta t, y_1 = y_0 + v_{y0}\delta t, z_1 = z_0 + v_{z0}\delta t$. Так как в правых частях уравнений математической модели фигурируют только координаты спутника и известная величина GM , то из этих уравнений можно вычислить проекции ускорения (изменения скорости) a_{x0}, a_{y0}, a_{z0} на оси координат в момент t_0 . Теперь по формулам $v_{x1} = v_{x0} + a_{x0}\delta t, v_{y1} = v_{y0} + a_{y0}\delta t, v_{z1} = v_{z0} + a_{z0}\delta t$ можно вычислить скорости спутника в момент $t_1 = t_0 + \delta t$. Таким образом в момент $t_1 = t_0 + \delta t$ стало известно положение спутника x_1, y_1, z_1 и его скорости v_{x1}, v_{y1}, v_{z1} . Точно также можно вычислить положение и скорости спутника в момент $t_2 = t_1 + \delta t$, а также в любой момент $t_i = t_0 + i \cdot \delta t$. Результаты этих вычислений будут зависеть от δt . Однако математическими средствами устанавливается (и это можно проверить вычислениями), что, если задать точность, с которой необходимо знать положение спутника, то существует столь малое значение δt , что описанный выше вычислительный процесс (в предположении, что вычисления ведутся абсолютно точно) будет давать значения местоположения спутника с этой точностью.

Пусть теперь тело массы M является Землей, а тело массы m — некоторым искусственным спутником Земли. Поскольку масса Земли равна $5,98 \cdot 10^{24}$ кг, то отношение m/M имеет порядок

10^{-20} и предположение о неподвижности Земли выполняется с высокой точностью. При вычислениях местоположений спутников в настоящее время принято использовать систему координат ось Z , которой направлена по оси вращения Земли, ось X направлена в точку весеннего равноденствия, ось Y направлена так, чтобы система координат XYZ составляла правую тройку. Эта система координат является приближенно инерциальной (с точностью, характеризуемой отношением характерного радиуса орбиты спутника к расстоянию от Земли до Солнца). Произведение GM принято называть геоцентрической гравитационной постоянной.

Рассмотрим проблему идентификации простейшей модели движения спутника Земли. Для этой идентификации необходимо измерить семь величин: GM , $x_0, y_0, z_0, v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}$. Что касается величины GM , то в пределах некоторой точности ее можно считать равной произведению ускорения силы тяжести g на поверхности Земли на квадрат радиуса Земли. Величины же $x_0, y_0, z_0, v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}$ в настоящее время измеряются в большинстве случаев с помощью радиолокационных станций — РЛС (радаров).

Идентификация составленной модели в настоящее время носит характер производственного процесса. Большинство современных РЛС (приблизительно 95 %), которые используются для идентификации модели движения спутников, не могут измерять одновременно все шесть значений $x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0, z'_0$. Они измеряют только две величины — расстояние между радаром и спутником и изменение этого расстояния со временем. Такая ситуация типична. Очень редко имеется возможность измерить значения всех внешних характеристик как это имеет место для приведенной выше простейшей демографической модели. В большинстве случаев непосредственно могут быть измерены некоторые величины, зависящие от характеристик (внешних и внутренних) модели (функции характеристик модели), количество которых меньше чем количество внутренних характеристик. Все внешние величины модели должны быть восстановлены с помощью измеренных величин и самой модели. Если внешние величины модели можно определить по выполненным измерениям, модель называется *наблюдаемой* относительно данной системы измерений.

Таким образом с проблемой идентификации модели связана проблема наблюдаемости: система измерений должна быть разработана так, чтобы модель была наблюдаемой относительно этой системы. Эта проблема является частью проблемы идентификации математической модели. Из сказанного ясно, что проблема идентификации математических моделей имеет методологический, математический, технический, экономический аспекты. Например, ее математический аспект состоит в установлении факта замкнутости математической модели, разработке алгоритма с помощью которого по выполненным измерениям восстанавливаются внешние величины модели, а также в разработке соответствующих программ для ЭВМ. Ее технический аспект состоит в проектировании и производстве необходимой измерительной аппаратуры. Ее экономический аспект связан с расходами на идентификацию математической модели, которые состоят из капитальных затрат (проектирование и производство измерительной аппаратуры) и эксплуатационных затрат (эксплуатация измерительной аппаратуры).

Проиллюстрируем некоторые из этих аспектов на примере проблемы идентификации модели

движения спутника. Как уже было сказано, идентификация моделей движения спутников носит характер производственного процесса. Этот производственный процесс является обеспечивающим для основного производственного процесса — прогноза положения спутников, находящихся на орбитах и осуществляющегося в космических центрах стран, располагающих спутниками. Прогноз положений спутников необходим, например, для наведения антенн, осуществляющих передачу информации, в том числе информации, управляющей функционированием спутника (Марсианский проект с посадкой автоматов на спутники Марса не был осуществлен из-за потери возможности в результате ряда ошибок передавать информацию на борт летящего к Марсу аппарата). Нормальное функционирование космической навигационной системы невозможно без точного прогноза положения спутников этой системы. Космическая навигационная система позволяет вычислять координаты любого объекта (при наличии на нем соответствующей аппаратуры) на Земле или в ее окрестности и точностью порядка нескольких десятков метров.

Идентификация модели движения для каждого спутника осуществляется обязательно сразу после его вывода на орбиту. Однако, для каждого спутника ее необходимо осуществлять периодически. В настоящее время прогноз положений спутников осуществляется по гораздо более сложной модели, чем выписанная выше простейшая модель. Однако, любая математическая модель дает приемлемые результаты при некоторых условиях, в некоторых рамках. Это относится и к моделям движения спутников. Как бы ни были точны используемые модели, всегда имеются факторы, влияющие на их движение, которые этой моделью не учитываются (например, удары микрометеоритов, давление солнечных лучей и т.д.). Это приводит к эволюции орбиты спутника и к необходимости через определенные промежутки времени заново выполнять идентификацию соответствующей модели.

С проблемой идентификации положений спутников тесно связаны проблемы так называемой стратегической стабильности в современном мировом сообществе. В большой мере эти проблемы определяются отношениями между Россией и США и касаются договоров СВН-1, СВН-2. Под ситуацией стратегической стабильности сейчас принято понимать такое количество ядерного оружия и средств его доставки в России и США (другие ядерные страны пока можно не принимать во внимание), при котором та страна, которая первой начнет ядерную войну, неизбежно получит ответный удар и ущерб от этого ответного удара будет неприемлемым. Эта трактовка ситуации стратегической стабильности была предложена министром обороны в администрации Д. Кеннеди Р. Макнамарой. В настоящее время каждая из стран имеет некоторое представление о том, как будут развиваться события, если одна из сторон начнет ядерную войну. В формировании этих представлений существенную роль играют математические модели, описывающие процесс обмена ядерными ударами и его результаты. (Эти модели являются моделями исследования операций, поскольку каждой из сторон неизвестна точно стратегия противной стороны и при всех оценках исходов обмена ядерными ударами необходимо постулировать принцип оптимальности.) Хотя ни США ни Россия не сообщают, конечно, своих планов на случай ядерной войны, эти планы каждая из сторон на самом деле знает, поскольку они с достаточной степени достоверности вычисляются средствами математического моделирования и исследования операций. Такая ситуация приводит к

тому, что обе стороны имеют совпадающие представления о ситуации стратегической стабильности и, по крайней мере, до сих пор обе стороны к такой ситуации осознанно стремились. В настоящее время можно считать, что ситуация стратегической стабильности имеет место. Разработка систем противоракетной обороны (ПРО) влияет, естественно, на ситуацию стратегической стабильности. Если одна из сторон разрабатывает системы ПРО, то вторая сторона для сохранения стабильности тоже должна это делать или же модернизировать свои ракеты так, чтобы они могли преодолевать систему ПРО. Совпадение представлений у России и США о том, что есть ситуация стратегической стабильности, являлось одной из причин успеха переговоров по СВН-1 и СВН-2.

В оценках ситуации стратегической стабильности и в системах ПРО существенную роль играют системы предупреждения о ракетном нападении (СПРН). Эти системы состоят из мощных РЛС, предназначенных для оперативной идентификации моделей движения ракет и определения на этой основе факта ракетного нападения на страну. Чем раньше будет выполнена эта идентификация тем больше ракет можно выпустить в ответном ударе, тем больший ущерб будет нанесен агрессору. Ясно также, что чем раньше будет выполнена идентификация траекторий движения нападающих ракет, тем легче отразить нападение, если средства отражения имеются. Структура системы СПРН является предметом переговоров между Россией и США поскольку эта система определяет ситуацию стратегической стабильности и может быть элементом противоракетной обороны. Некоторое время назад одной из проблем в отношениях между СССР и США была Красноярская РЛС, которая являлась элементом системы СПРН. По мнению американской стороны она нарушала договоренности по ПРО, поскольку позволяла идентифицировать факт ракетного нападения при ракетах, летящих с Восточного направления. В результате Красноярская РЛС была демонтирована.

В настоящее время политики в США приняли решение создавать систему ПРО, нарушающую договоры СВН-1 и СВН-2. США пытаются договориться с Россией о том, чтобы Россия не препятствовала этим планам.

Литература

1. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Физматгиз. 1963. С. 181-204.

Лекция 6. Имитация при изучении случайных процессов.

1. Содержание первых девяти пунктов настоящей лекции можно считать напоминанием основных фактов теории вероятностей и математической статистики. В десятом пункте настоящей лекции предпринимается попытка объяснить почему в моделях сложных процессов почти обязательно присутствуют случайные факторы и поэтому они являются моделями случайных процессов.

Вероятностное описание рационально использовать тогда, когда мы имеем дело с процессом, который возможно многократно воспроизводить, создавая для этого соответствующие условия, или который многократно воспроизводится в реальности независимо от чьей либо воли. При этом мы заранее знаем множество

$$S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$$

конечных состояний этого процесса, знаем (или предполагаем), что каждое состояние s_i , появляется при воспроизведениях процесса с одинаковой относительной частотой, однако, мы не можем или не хотим явно описывать все, что приводит к тому или иному состоянию s_i из множества S , в частности, все внешние факторы, которые на это влияют. В этом случае каждому состоянию s_i из S приписывают число p_i - относительную частоту появления этого состояния при многократных воспроизведениях процесса, так, что $0 \leq p_i \leq 1$, $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ и называют его вероятностью состояния s_i .

В лекции 2 отмечалось, что в зависимости от практических потребностей при обращении к технологии математического моделирования явно или неявно фиксируются характерные параметры осреднения величин модели, определяющие точку зрения, позицию, с которой мы смотрим на моделируемый процесс. В зависимости от выбора характерных параметров осреднения один и тот же процесс может быть и вероятностным и детерминированным. Для простой иллюстрации высказанного положения представим себе, что некто бросает монету с частотой, скажем, 1 раз в секунду и делает это так долго, как потребуется в следующих рассуждениях. Мы хотим знать функцию, указывающую для каждого момента времени сколько раз в расчете на временную единицу вокруг данного момента времени выпадает орел. Если характерный параметр осреднения по времени порядка суток (именно это время мы и примем за единицу), и мы желаем знать ответ с точностью до 10%, (тем самым мы постулировали характерный масштаб осреднения в значении прогнозируемой величины), то интересующую нас величину в каждый момент времени можно считать детерминированной. Эта величина не меняется со временем и равна (если бросаемая монета достаточно симметрична) 43000 (в сутках 86400 секунд). Если характерный масштаб осреднения по времени порядка нескольких секунд, и мы по-прежнему желаем знать ответ с точностью 10%, то интересующая нас величина в каждый момент времени случайна и принимает в разные моменты разные значения.

Высказанное положение носит достаточно общий характер. Является изучаемый процесс случайным или детерминированным, часто зависит от точки зрения, определяемой выбором характерных масштабов осреднения величин модели. А этот выбор, в свою очередь определяется целями моделирования, тем, прогноз каких именно величин и с какой точностью нас интересует.

2. Во многих случаях с исходами s_i случайного процесса естественным образом связываются числа x_i . Собственно говоря, во многих случаях исходы s_i и есть некоторые числа x_i . В этом случае говорят о случайной величине X , могущей принимать значения $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ с вероятностями, соответственно $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$. Функцией распределения (или законом распределения) случайной величины X называют вероятность $P(x)$ того, что случайная величина примет значение меньше x . Математическим ожиданием $M[X]$ случайной величины X называют ее "среднее значение", подсчитываемое по формуле

$$M[X] = \sum_{i=1}^{i=n} x_i p_i$$

Центральным моментом порядка ρ случайной величины X называют математическое ожидание $M[(X - M[X])^\rho]$ случайной величины $(X - M[X])^\rho$. Наиболее употребителен центральный момент $D[X]$ порядка 2, подсчитываемый по формуле

$$D[X] = M[(X - M[X])^2] = \sum_{i=1}^{i=n} (x_i - \sum_{i=1}^{i=n} x_i p_i)^2 p_i$$

и называемый дисперсией. Средним квадратическим отклонением $\sigma[X]$ случайной величины называется квадратный корень из дисперсии. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины - ее наиболее важные характеристики. Они дают представление о "положении" случайной величины и о ее "разбросанности".

До сих пор речь шла о так называемых дискретных случайных величинах, которые могут принимать лишь конечное (либо бесконечное, но счетное) множество значений. Задание для каждого значения случайной величины вероятности, с которой это значение принимается, называется рядом распределения. Иногда бывает удобно считать, что случайная величина X может принимать бесконечно много значений из некоторого непрерывного множества действительных чисел. Например, тогда, когда n велико, вероятности p_i малы и количество значений, которое может принять величина X на промежутке ε , совпадающем по порядку величины с характерным параметром осреднения величины X (см. лекцию 2), велико. В этом случае ее уже нельзя описывать рядом распределения и ее исходной характеристикой становится функция распределения $P(x)$, определяемая точно так же, как это было сделано выше, т.е. $P(x)$ есть вероятность того, что случайная величина примет значение меньше x . Если эта функция непрерывна, то случайная величина называется непрерывной. Вероятность любого отдельного значения непрерывной случайной величины равна нулю и поэтому для непрерывных случайных величин имеет смысл говорить лишь о вероятности того, что ее значение принадлежит некоторому множеству. Вероятность того, что значение x случайной величины X принадлежит множеству $[a, b)$ равна $P(b) - P(a)$.

Если функция распределения $P(x)$ непрерывной случайной величины X является дифференцируемой, то удобно оперировать ее плотностью распределения $p(x) = dP(x)/dx$, также являющейся исчерпывающей характеристикой случайной величины. Вероятность того, что случайная величина примет значение из промежутка $(x, x+dx)$ малой длины dx равна $p(x)dx + O(dx^2)$. Для непрерывной случайной величины, обладающей плотностью распределения, математическое ожидание $M[X]$ и дисперсия $D[X]$ определяются следующим образом:

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx$$

$$D[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[X])^2 p(x)dx$$

3. Непрерывная случайная величина, плотность распределения $p(x)$ которой дается формулой

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

называется распределенной по нормальному закону. Очень многие реальные случайные величины распределены по нормальному закону. Природа этого факта состоит в том, что нормальное распределение является пределом суммы независимых случайных величин, распределенных по произвольным законам (необходимо выполнение некоторых весьма нежестких ограничений) при стремлении количества этих независимых случайных величин к бесконечности. Многие реальные случайные величины являются как раз суммами большого количества слабо зависимых случайных величин.

Математическое ожидание случайной величины, распределенной по нормальному закону равно m , среднее квадратическое отклонение равно σ .

Дискретная случайная величина X , могущая принимать значения из множества натуральных чисел $N = \{0,1,2,\dots\}$, ряд распределения которой дается формулой

$$p_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a}, \quad (1)$$

называется распределенной по закону Пуассона. Многие реальные случайные величины распределены по закону Пуассона. Природа этого факта состоит в следующем. Пусть производится n независимых опытов, в каждом из которых некоторое событие A появляется с вероятностью q . Пусть X - случайная величина, значение которой есть число m появлений события A в n опытах. Ряд распределения величины X дается формулой

$$p_m = C_n^m q^m (1-q)^{n-m} \quad (2)$$

Распределение (1) является предельным для распределения (2), когда число опытов n стремится к бесконечности, а вероятность p появления события A в каждом опыте стремится к нулю, так, однако, что произведение np стремится к a . Многие реальные случайные величины являются результатом осуществления очень большого числа опытов, в каждом из которых вероятность появления некоторого события весьма мала.

Математическое ожидание случайной величины, ряд распределения которой дается законом Пуассона (1) равно a , ее дисперсия также равна a .

4. Математическая статистика занимается разработкой методов регистрации, описания, анализа экспериментальных данных, получаемых в результате наблюдения массовых случайных явлений. Здесь мы коснемся только одной из ее задач - задачи экспериментального определения числовых характеристик случайных величин. Пусть произведено n опытов, в результате которых получено множество $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ значений случайной величины X . Естественно оценить математическое ожидание этой величины по формуле

$$M^*[X] = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n}, \quad (3)$$

а дисперсию - по формуле

$$D^*[X] = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - M^*[X])^2}{n} \quad (4)$$

Пусть истинные математическое ожидание и дисперсия случайной величины X равны, соответственно, M и D . Рассмотрим величины $M^*[X]$ и $D^*[X]$ как случайные, определенные формулами (3) и (4), соответственно. Математическое ожидание величины $M^*[X]$ равно M , а математическое ожидание величины $D^*[X]$ равно $\frac{D(n-1)}{n}$. Эти факты принято выражать следующим образом: экспериментальная оценка (3) математического ожидания является "несмещенной", а экспериментальная оценка (4) дисперсии является смещенной: если повторять много раз серию из n опытов, получая каждый раз экспериментальные значения случайной величины X и вычислять каждый раз значение $D^*[X]$, то оно будет колебаться не вокруг истинного значения дисперсии D , а вокруг значения $\frac{D(n-1)}{n}$. Несмещенная оценка величины дисперсии дается формулой

$$\tilde{D}^*[X] = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - M^*[X])^2}{n-1}$$

Часто на практике возникает не только задача экспериментального вычисления числовых характеристик случайных величин, но и задача оценки точности и надежности этого вычисления. Пусть по экспериментальным наблюдениям случайной величины вычислена оценка (3) ее математического ожидания. Обозначим через α вероятность того, что величина $M^*[X]$ отклонится от истинного математического ожидания не более чем на ε . Величину α называют доверительной вероятностью, а интервал $(M^*[X] - \varepsilon, M^*[X] + \varepsilon)$ называют доверительным интервалом. Доверительный интервал характеризует точность полученного результата, а доверительная вероятность - его надежность. Задав число ε , можно по имеющимся экспериментальным результатам оценить вероятность попадания вычисленного значения $M^*[X]$ в доверительный интервал.

5. Развивающийся во времени процесс, характеристики которого в любой момент времени являются случайными величинами, называется случайным. Случайные процессы описываются случайными функциями, при каждом значении t являющимися случайными величинами. Пусть $X(t)$ - случайная функция. Для каждого момента времени t можно определить математическое ожидание $M[X(t)] = m(t)$ и дисперсию $D[X(t)] = d(t)$.

Пусть в случайные моменты времени происходит некоторое событие А (примеры: появление клиента в некоторой системе обслуживания, поломка некоторого прибора и т.д.). Обозначим через $X(t)$ количество наступлений события А на промежутке времени от 0 до t и будем рассматривать эту функцию как случайную, характеризующую процесс. Этот процесс называется стационарным пуассоновским процессом, если вероятность $P(dt)$ того, что событие А произойдет в течение малого промежутка dt дается формулой

$$P(dt) = \lambda \cdot dt + o(dt), \quad (5)$$

где λ - постоянная. Число λ называется интенсивностью потока событий или параметром пуассоновского процесса.

Для пуассоновских процессов вероятность $P_m(t)$ того, что на промежутке $(0, t)$ произойдет ровно m наступлений события А дается формулой

$$P_m(t) = \frac{(\lambda \cdot t)^m}{m!} e^{-\lambda t} \quad (6)$$

Здесь необходимо обратить внимание на связь между формулой (6) и (1), которая, естественно, не случайна.

6. В математических моделях случайных процессов из соотношений модели определяются ряды распределения интересующих нас случайных величин или их функции распределения или их плотности распределения - в зависимости от характера этих случайных величин, а также зависимость этих рядов (функций, плотностей) распределения от времени и внешних величин. Таким образом, внутренними величинами в математических моделях случайных процессов являются вероятности нахождения изучаемой системы в одном из состояний, в котором она может находиться. С утилитарно-практической точки зрения в большинстве случаев нужны только две характеристики случайных величин - математическое ожидание и дисперсию.

Приведем примеры математических моделей случайных процессов. Пусть имеется некоторая физическая система S , которая может находиться в n состояниях

$$s_1, s_2, \dots, s_n$$

. С течением времени система может переходить из состояния в состояние случайным образом. Процесс \mathbb{P} перехода системы S из состояния в состояние называется марковским, если вероятность перехода λ_{ij} из состояния s_i в состояние s_j зависит только от i и j и не зависит от того, каким образом система оказалась в состоянии i . Процесс \mathbb{P} называется процессом с дискретным временем, если переходы системы из состояния в состояние могут совершаться только в дискретные моменты времени $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$, а в промежутках между этими моментами система сохраняет свое состояние. Процесс \mathbb{P} называется процессом с непрерывным временем, если переходы системы из состояния в состояние возможны в любой наперед неизвестный случайный момент времени и вероятность того, что система S перейдет из состояния i в состояние j в течение малого промежутка dt дается формулой

$$P(dt) = \lambda_{ij} \cdot dt + o(dt).$$

Основная задача теории марковских процессов состоит в расчете вероятностей $p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)$ нахождения системы S в состояниях s_1, s_2, \dots, s_n в любой момент времени t . Эти вероятности являются внутренними величинами соответствующих математических моделей. Другими словами, необходимо найти соответствующий ряд распределения. Если эти вероятности найдены, то возможно рассчитать все другие характеристики процесса \mathbb{P} . Внешними величинами соответствующих моделей являются величины λ_{ij} перехода системы из состояния s_i в состояние s_j и начальные вероятности p_i^0 .

Для процессов с дискретным временем решение этой задачи дается формулами

$$p_i(t_k) = \sum_{j=1}^n p_j(t_{k-1}) \lambda_{ji}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7),$$

где

$$p_i(t_0) = p_i^0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

Для процессов с непрерывным временем для решения этой задачи необходимо интегрировать уравнения Колмогорова

$$\frac{dp_i}{dt} = -\left(\sum_{j=1}^n \lambda_{ij}\right) \cdot p_i + \sum_{j=1}^n p_j \lambda_{ji}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (9)$$

с начальными условиями (8).

Часто бывает интересно знать так называемые финальные вероятности $p_1(\infty), p_2(\infty), \dots, p_n(\infty)$ состояний s_1, s_2, \dots, s_n , т.е. пределы вероятностей $p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)$ при $t \rightarrow \infty$. Финальные вероятности не всегда существуют. Если они существуют, то должны удовлетворять системе линейных алгебраических уравнений,

$$\left(\sum_{j=1}^n \lambda_{ij}\right) p_i(\infty) = \sum_{j=1}^n p_j(\infty) \lambda_{ji}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (10)$$

получающейся из (9) при стремлении t к ∞ . Одно из уравнений системы (10) нужно, естественно выбросить, заменив его условием

$$\sum_{j=1}^n p_j = 1.$$

Рассмотренные в данном разделе системы являются системами с дискретными состояниями. Имеются системы, число состояний которых удобно считать бесконечно большим и характеризовать их числами из некоторого непрерывного интервала. Такие системы называются системами с непрерывными состояниями.

7. Также как и в случае детерминированных процессов лишь небольшое число реальных случайных процессов описываются моделями, внутренние величины которых в зависимости от внешних

можно рассчитывать по аналитическим формулам типа (5)-(8). В том случае, когда аналитических формул, позволяющих рассчитывать интересующие нас характеристики не существует или они существуют, но мы не сумели выявить этот факт, эти характеристики можно рассчитывать, воспроизводя с помощью подробной модели реализации изучаемого процесса, и обрабатывая полученные результаты методом математической статистики.

В теории вероятностей и математической статистике этот метод вычисления статистических характеристик случайных величин получил название "имитация". Другое его название - метод Монте-Карло.

Поясним этот метод на простом примере. Именно, изложим, как методом имитации оценить вероятность того, что на промежутке $(0, t)$ произойдет ровно m наступлений некоторого события A , если этот процесс является Пуассоновским. Промежуток $(0, t)$ разбивается на маленькие интервалы длины dt . Реализуется следующий вычислительный процесс. На каждом интервале, начиная с первого, с помощью соответствующего датчика выбрасывается случайное число ξ , равномерно распределенное на интервале $(0, 1)$. Если оказалось, $\xi > dt$, то считается, что событие A на соответствующем интервале наступило. В противном случае событие A на рассматриваемом интервале считается не наступившим. После того, как это будет сделано для всех интервалов промежутка $(0, t)$, подсчитывается количество наступивших событий A . Реализуя этот процесс n раз получим множество $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ значений рассматриваемой случайной величины, по которым методами математической статистики вычислим интересующие нас характеристики.

8. Теория массового обслуживания изучает класс случайных процессов, среди которых находятся те, к которым мы все привыкли в бытовой жизни, когда имеем дело с ремонтными мастерскими, билетными кассами, справочными бюро и т.д. Всякая система массового обслуживания (СМО) предназначена для обслуживания некоторого потока заявок, поступающих, вообще говоря, в случайные моменты времени. СМО состоит из некоторого числа обслуживающих единиц, которые в теории массового обслуживания принято именовать приборами или "каналами обслуживания". Обслуживание заявки также длится, вообще говоря, случайное время. Процесс работы СМО является случайным процессом с дискретными состояниями и непрерывным временем.

Предмет теории массового обслуживания - построение математических моделей, связывающих заданные условия работы СМО (число каналов, их производительность, правила работы, характер заявок) с интересующими нас характеристиками - показателями эффективности СМО, описывающими ее способность справляться с потоком заявок. Такими показателями могут быть, например, среднее число заявок, обслуживаемых СМО в единицу времени, среднее число заявок в очереди, среднее время обслуживания одной заявки и т.д.

Математический анализ работы СМО очень облегчается, если все потоки, как входящие в СМО, так и "внутренние" - от одного прибора к другому, являются стационарными и пуассоновскими. В этом случае, функционирование СМО описывается уравнениями Колмогорова и, как правило, можно получить аналитические формулы, дающие характеристики СМО в зависимости от условий работы СМО. Если в системе имеются непуассоновские потоки, то получить явных аналитических формул

для интересующих нас характеристик не удастся и для их определения необходимо прибегать к имитации.

СМО делятся на типы по ряду признаков. Первое деление: СМО с отказами и СМО с очередью. В СМО с отказами заявка, поступившая в момент, когда все каналы заняты, покидает СМО, в СМО с очередью - становится в очередь. СМО с очередью подразделяются в зависимости от того, как организована очередь - ограничена она или нет. Кроме этих признаков, СМО делятся на два класса: открытые и замкнутые. В открытой СМО характеристики потока заявок не зависят от того, в каком состоянии находится сама СМО, в замкнутой - зависят. Имеются и другие признаки, по которым классифицируются СМО.

9. Одна из простейших СМО - n -канальная с отказами: пуассоновский поток интенсивности λ поступает на систему обслуживания, состоящую из n одинаковых "параллельных" приборов (каналов обслуживания). Каждый прибор также является "пуассоновским": если заявка находится на обслуживании, то вероятность, что ее обслуживание закончится на малом интервале dt дается формулой

$$P(dt) = \mu dt + o(dt). \quad (11)$$

(Пуассоновский прибор продуцирует пуассоновский поток обслуженных им заявок.)

Данная СМО может находиться в n состояниях. Состояние s_i - это ситуация, когда i приборов заняты обслуживанием заявок, а остальные свободны. Финальные вероятности $p_i(\infty)$ в этой системе даются формулами

$$p_0(\infty) = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n \frac{\rho^i}{i!}}$$

$$p_i(\infty) = p_0(\infty) \cdot \frac{\rho^i}{i!}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (12)$$

где $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$. Эти формулы называются формулами Эрланга. Располагая финальными вероятностями (11), (12) можно вычислить все интересующие нас характеристики данной СМО. Например, вероятность $P_{\text{отк}}$ того, что пришедшая заявка не будет обслужена (т.е. в момент ее прихода все n приборов будут заняты) дается формулой $P_{\text{отк}} = p_0(\infty) \cdot \frac{\rho^n}{n!}$, среднее число I занятых приборов - формулой

$$I = \rho \left(1 - \frac{p_0(\infty) \cdot \rho^n}{n!} \right)$$

и т.д. Аналогично рассчитываются другие типы СМО, если все потоки в них являются пуассоновскими.

Если хотя бы один поток в СМО не является пуассоновским, то получение аналитических формул, связывающих показатели эффективности СМО и ее характеристики становится крайне затруднительным. Естественным методом расчета таких СМО становится имитация - воспроизведение на ЭВМ реализаций случайного процесса функционирования СМО с последующей обработкой результатов методами математической статистики.

10. Ведем понятие "сложный процесс": таковым считается такой, прогноз которого недоступен технологии математического моделирования при данном уровне ее развития. Будем считать,

что это — ”внешняя” характеристика сложного процесса. Здесь мы дадим другую характеристику этого понятия, которую можно охарактеризовать как ”внутреннюю”. Именно, среди ”сложных” процессов значительный класс составляют такие процессы, которые являются совокупностью нескольких одновременно протекающих взаимосвязанных, но разномасштабных по времени процессов, для составления моделей которых необходимы отличающиеся на порядки характерные масштабы осреднения величин по времени. Достаточно часто встречается ситуация, когда среди взаимодействующих процессов можно выделить небольшое количество ”главных”, характеристики которых нас интересуют и именно ради прогноза этих характеристик разрабатывается модель. Характерный временной масштаб остальных процессов много меньше и их характеристики нас интересуют постольку, поскольку они влияют на характеристики главных процессов. Таким образом, происходящие процессы делятся на ”медленные”, прогноз развития которых нас интересует, и ”быстрые”, характеристики которых нас не интересуют, однако, влияние их на медленные нужно уметь учитывать.

В таких случаях характерный временной масштаб осреднения выбирается так, чтобы иметь возможность составить модель развития главных процессов с учетом их взаимодействия. Что касается быстрых процессов, то в рамках создаваемой модели, характерный временной масштаб которой определяется главными процессами, разрабатывают алгоритмы, рассчитывающие моменты осуществления ”быстрых” процессов и рассчитывающие их ”результат”, т.е. изменения, которые осуществление этих процессов вносит в интересующие нас внешние величины главных процессов.

Возможны два подхода к моделированию влияния быстрых процессов на медленные. Первый состоит в разработке модели их развития с соответствующим характерным временным масштабом осреднения, много меньшим, чем у главных процессов. При этом в модели появляется также и два времени - медленное и быстрое. При расчете развития быстрого процесса, в соответствии с его моделью, характеристики медленных процессов не меняются, т.е. медленное время как бы стоит на месте. Результатом расчета быстрого процесса является изменение характеристик медленных процессов, с точки зрения медленного времени происходящего мгновенно.

Для того, чтобы иметь возможность реализовать этот способ расчета влияния быстрых процессов на медленные, необходимо вводить соответствующие внешние величины, идентифицировать и верифицировать эти модели, что усложняет все этапы технологии математического моделирования. Второй путь моделирования влияния быстрых процессов на медленные состоит в отказе от описания их развития с помощью моделей и рассмотрения их характеристик как случайных величин. Для реализации этого способа необходимо иметь функции распределения тех случайных величин, которые характеризуют влияние быстрых процессов на медленные, а также зависимость этих функций распределения от характеристик медленных процессов. В модели должны по-прежнему присутствовать алгоритмы, определяющие моменты наступления быстрых процессов. В эти моменты все внутренние величины медленных процессов должны быть известны. Вместо расчета развития быстрых процессов производится выброс случайного числа и в зависимости от выпавшего значения в соответствии с известными функциями распределения случайных величин, характеризующих результат

протекания быстрых процессов, определяется какое значение примут эти величины и, таким образом рассчитывается влияние быстрых процессов на медленные. В результате характеристики медленных процессов также станут случайными величинами. Какой из этих способов учета влияния быстрых процессов на медленные предпочтительней зависит от целей моделирования, необходимой точности прогноза, имеющихся инструментов и т.д. Необходимо заметить, что при первом способе моделирования влияния быстрых процессов на медленные, когда составляется модель некоторого быстрого процесса, то мы часто находимся в той же позиции, в какой мы находились при составлении модели исходного процесса. Именно, моделируемый быстрый процесс становится медленным, главным, на его течение влияют быстрые уже по отношению к нему процессы и это влияние опять можно моделировать двумя способами. Эта иерархическая вложенность быстрых процессов в медленные одна из составляющих того качества моделируемого процесса, который мы назовем "внутренней сложностью". Одна из причин почти неизбежного появления случайных факторов в модели сложного в таком понимании процесса - необходимость на каком-то уровне описанной иерархии отказываться от первого способа моделирования влияния очередного быстрого процесса на медленные и трактовки этого влияния как случайного.

Деление изучаемых взаимодействующих процессов на быстрые и медленные при составлении их математической модели - типичный пример ситуации, когда в модели появляются случайные факторы, о которых шла речь при объяснении терминов "имитационная модель", "имитационное моделирование". В этом случае, как уже говорилось, интересующие нас характеристики медленных процессов становятся случайными величинами и для вычисления их статистических характеристик необходимо выполнять имитацию в том смысле, в котором этот термин понимается в теории вероятностей и математической статистике, т.е. выполняя серию имитационных экспериментов получать реализации интересующих нас случайных величин и производить затем обработку результатов методами математической статистики.

Литература

1. Г н е д е н к о Б.В. Курс теории вероятностей. М.: Физматгиз, 1965. Гл. 4. С. 127-162. Гл. 5. С. 168-195. Гл. 11. С. 346-383.
2. В е н ц е л ь Е.С. Исследование операций. М.: Наука. 1988. Гл. 5. С. 112-131. Гл. 6. С. 132-160.

Лекция 7. Метод имитационных игр при изучении сложных процессов.

1. С имитационными математическими моделями тесно связан метод имитации и имитационных игр при изучении сложных управляемых процессов. Термину "сложный управляемый процесс" в данной лекции будет придаваться более конкретное содержание, чем общепринятое. Именно, "сложным управляемым процессом" будет называться такой процесс, управление которым существующими средствами и методами не может быть автоматизировано в достаточной мере и при управлении этим процессом существенна роль людей (практиков – управленцев, экспертов, операторов, менеджеров и т.д.), организованных, вообще говоря, в некоторую управляющую структуру, элементы которой трактуются как органы управления. Будет считаться, что в органах управления реализуется "процесс принятия решений".

Метод имитации и имитационных игр выходит, вообще говоря, за рамки математического моделирования. Он состоит в таком модельном воспроизведении (не обязательно с помощью математических моделей – см. ниже) управляемого процесса, при котором процесс принятия решений воспроизводится "как можно более натурно". Можно сказать также, что главное в методе имитации и имитационных игр – как можно более подробное и адекватное воспроизведение процесса принятия решений. Это означает, что действия управляющих органов, принимаемые ими решения, воспроизводит специальная группа экспертов, олицетворяющих эти органы. Это означает также, что воспроизведению на некотором уровне подвергается информационный процесс – процесс сбора, обработки, хранения, передачи информации, поскольку принимаемые органами управления решения существенно зависят от располагаемой ими информации и никакого адекватного воспроизведения процесса принятия решений не может быть, если информационный процесс воспроизводится неверно. Если интересы различных органов управления, могущих влиять на изучаемый процесс не являются тождественными, то воспроизведение процесса называется имитационной игрой, в противном случае – просто имитацией.

Использованное здесь слово "воспроизведение" – это не обязательно воспроизведение течения процесса с помощью математических моделей. Если это так, то математическую модель называют имитационной, а воспроизведение течения процесса в таком случае называется имитационным экспериментом. Если изучаемым процессом управляют несколько субъектов с несовпадающими интересами, то имитационные эксперименты принимают форму имитационных игр. Однако, "воспроизведение" может означать также, что характеристики процесса, описывающие его течение, получаются не с помощью математического моделирования, а с помощью оценок, которые даются другой специальной группой экспертов, называемых обычно "посредниками". Может быть и такая ситуация, когда некоторые стороны или части процесса подвергаются математическому моделированию, а некоторые – оцениванию с помощью посредников.

В последнем случае принято говорить, что имитация сложного процесса или имитационная игра "поддерживается" математическими моделями. Соотношение между математическим моделирова-

нием и оцениванием с помощью посредников при воспроизведении объективных характеристик процесса зависит от самого процесса и может быть самым разным. Здесь одна крайность – это ”чистая” имитация или ”чистые” имитационные игры, где оценивание с помощью посредников объективных характеристик не используется и эти характеристики рассчитываются с помощью соответствующих имитационных моделей. Другая крайность – это экспертное воспроизведение объективных характеристик процесса без использования математического моделирования. Имитационные игры в этом случае будут называться ”организационно-деятельностными”. Термин ”смешанная” имитационная игра будет использоваться для имитационных игр, где для воспроизведения объективных характеристик процесса применяется как математическое моделирование, так и оценки посредников.

Метод имитации и имитационных игр, так как он здесь понимается, широко используется в различных областях исследований, обучения и практической деятельности. В историческом плане его первые применения, повидимому, – это командно-штабные игры, существующие в практике изучения вооруженной борьбы и обучения управления ею с середины прошлого века. Командно-штабные игры вплоть до начала шестидесятых годов настоящего столетия были чисто организационно-деятельностными. В настоящее время в этой сфере используются все виды имитационных игр, а расходы на разработку соответствующих моделей, организацию и проведение игр становятся все более заметной долей в общих расходах на оборону (в так называемых ”развитых странах”) и имеется тенденция очень быстрого увеличения этой доли.

Примеры использования метода имитации и имитационных игр являются тренажеры в авиационной и аэро-космической индустрии, разработка систем безопасности АЭС и обучение операторов АЭС. Под названием ”деловые игры” метод имитации и имитационных игр используется при изучении социально-экономических процессов различных уровней. Деловые игры – это, как правило, организационно-деятельностные игры.

В методе имитации и имитационных игр весьма существенную роль играет то, что принято называть ”сценарием”. Это – сложное понятие, понимаемое по разному различными специалистами, связанными с методом имитации и имитационных игр. Прикладные математики, связанные с имитацией и имитационными играми, называют сценарием все ”внешнее” по отношению к математическим моделям, воспроизводящих течение процесса: совокупность величин, описывающих начальное состояние моделируемого процесса, совокупность правил и ограничений, которым должны подчиняться действия экспертов, воспроизводящих процесс принятия решений в моделируемой системе и т.д. Кроме того в сценарий входит цель, которая ставится при изучении процесса методом имитации или имитационных игр.

Понятием ”сценарий” пользуются также специалисты гуманитарного профиля, политологи, никак не связанные с методом имитации и имитационных игр. Здесь понятие ”сценарий” носит, естественно, более расплывчатый характер. Оно означает общее описание предполагаемого варианта развития некоторого сложного социально-экономического процесса, выделение его узловых моментов.

2. В качестве примера метода имитации и имитационных игр опишем цикл исследований, выполнявшийся в Вычислительном центре РАН, посвященный проблемам геополитики и межгосударственных отношений методом имитационных игр. Инициатором этого цикла исследований (также как и имитационной модели исторического процесса, описанной в лекции 6) был академик Н.Н. Моисеев. Первая имитационная игра такого сорта была выполнена в 1968–1969 гг. Непосредственной причиной ее организации и проведения были отрицательные эмоции, которые вызывали существовавшие в то время модели социально-экономических процессов. Конец шестидесятых и начало семидесятых годов характеризовались интенсивным развитием в СССР экономико-математических методов и иллюзиями у многих исследователей, что на их базе можно коренным образом улучшить эффективность социально-экономической системы, имевшей место в СССР. Подавляющее большинство математиков, функционировавших в этой сфере, не были тесно связаны с профессиональными практиками-управленцами. Реальные задачи управления в существовавшей в СССР социально-экономической системе они втискивали в прокрустово ложе оптимизационных и теоретико-игровых схем, а безуспешные попытки внедрить что-либо в практику принятия решений относили к косности практиков-управленцев. Ощущение разрыва между сферой изучения задач управления в социально-экономических системах формальными методами и практикой реального управления было одной из причин, побудивших группу исследователей ВЦ АН СССР (Ватель И.А., Гермейер Ю.Б., Евтушенко Ю.Г., Ерешко Ф.И., Кононенко А.Ф., Краснощеков П.С., Павловский Ю.Н., Петров А.А.) обратиться к имитационной игре. Была сделана попытка разработать модель какого-либо социально-экономического процесса, с одной стороны, достаточно сложную, чтобы в ней остались некоторые черты реальной управленческой проблемы, с другой стороны, достаточно простую, чтобы ее можно было реализовать существовавшими тогда средствами.

В качестве объекта моделирования была выбрана система из трех государств. Была построена математическая модель экономического и военного функционирования государств. Они располагали территорией, разделенной на регионы. Регионы характеризовались количеством расположенных в них мирных и военных фондов и вооружений. Мирные фонды производили мирную продукцию, военные фонды производили вооружения, обычные и ядерные. Количество производимой продукции характеризовалось фондоотдачей, своей для каждого региона. Фонды могли быть расположены не только на территории своей страны, но и на территории других стран. Полученную мирную продукцию каждая страна делила на потребление и инвестиции. Инвестиции, в свою очередь, распределялись на вложения в мирный и военный сектора экономики. Изменение фондов определялось сделанными инвестициями и естественной амортизацией. Если обозначить через k количество фондов данной страны в данном регионе, через μ – коэффициент амортизации фондов (уменьшение количества фондов в единицу времени в расчете на единицу фондов), через i – инвестиции в данный регион в расчете на единицу времени, через δk – разность между убылью фондов и их прибавкой в данном регионе в расчете на единицу времени, имеющих место из-за перемещения фондов по регионам, передачи фондов в собственность другим странам и потерей фондов из-за вооруженной борьбы, через α – коэффициент фондоотдачи в данном регионе количество продукции, получаемой

с единицы фондов в единицу времени, через y – количество продукции, производимой в данном регионе в единицу времени, то экономическое функционирование данной страны в данного региона определялось соотношениями:

$$dk/dt = -\mu \times k + i + \delta k, y = \alpha \times k$$

Страны могли обмениваться мирной и военной продукцией, вступать в союзы, заключать договора военного и экономического характера, воевать, как с применением обычного, так и ядерного оружия. Результаты боевых действий, если они происходили, воспроизводились с помощью простейших вариантов моделей вооруженной борьбы с учетом психологических факторов [1,2]. Каждая страна, располагавшая ядерным оружием, заранее составляла план его использования, указывающий количества средств, нацеленных по различным регионам. Все, находившееся в регионе, если ядерные средства его достигали, терпело урон в соответствии с заданными коэффициентами, характеризующими эффективность ядерного оружия. Страны могли вкладывать средства в систему ПРО, уменьшавшую количество ядерного оружия, достигавшее страну.

Кратко опишем элементы сценария и некоторые фрагменты выполненной в то время имитационной игры. Подробное изложение этой игры имеется в [3]. В игре участвовало три государства. Самое развитое из них (далее оно будет именоваться страной Г), как в экономическом, так и в военном отношении имело небольшую территорию и высокую концентрацию мирных и военных фондов на ней. Государство, которое далее будет именоваться страной К, занимало в рассматриваемой системе промежуточное положение по экономическому развитию, а в военном отношении не уступало стране Г и имело большую территорию и малую концентрацию фондов. Государство, которое далее именуется страной В, было слабо развито как экономически, так и в военном отношении, но в нескольких его регионах, пограничных со страной К, имелись ценные природные ресурсы, что создавало существенно более высокую эффективность инвестиций в эти регионы, чем в любые другие регионы рассматриваемого "мира". У стран Г и К в начале игры имелось ядерное оружие, но его было немного – недостаточно, чтобы существенно уменьшить экономический и военный потенциал. К этому необходимо добавить, что по сценарию игры игроки имели очень неточную информацию об эффективности как ядерного оружия противника, так и своего собственного. Страна В не имела ядерного оружия и по сценарию игры не могла его самостоятельно производить.

Страна Г имела довольно большие мирные фонды на территории страны В, сосредоточенные как раз в областях с ценными природными ресурсами рядом с границей страны К. По сценарию выигрывала та страна, которая в момент окончания игры добилась самого большого прироста мирного капитала на единицу первоначального, что, в сущности, соответствовало саму большому относительному приросту народного потребления. Момент окончания игры не был известен играющим. Начальные условия и параметры модели были подобраны так, что, если бы страны вели себя пассивно (не вели войн, не милитаризовывали экономику, не старались добиться преимуществ экономическими способами), то относительный прирост мирного капитала у них был бы примерно одинаков. За каждую страну играла группа сотрудников Вычислительного центра РАН, являв-

шихся весьма квалифицированными специалистами в области методов оптимизации и теории игр. Выполненная игра была по введенной выше терминологии смешанной, поскольку информационный процесс воспроизводился посредниками, которыми были перечисленные выше организаторы игры.

Отметим некоторые моменты, связанные с этой игрой, которые представляются интересными. Прежде всего, отметим, что, несмотря на относительную простоту использованных математических моделей, никто из играющих не нашел возможности использовать методы оптимизации и теории игр для принятия своих решений. В игре были три четко выраженных периода. Первый период можно охарактеризовать как период "вхождения в роли" руководителей стран и осознания своих интересов в образовавшейся системе. В этот период каждая страна вела себя осторожно, не принимала никаких "резких" решений, сохраняя ту ситуацию, которая была задана сценарием как начальная. Вторым периодом можно охарактеризовать как образование в системе государств двух конфронтационных военно-политических блоков. Третий период – военный конфликт.

Наиболее интересным моментом в игре, на котором мы остановимся более подробно, был механизм возникновения конфронтации и вооруженного конфликта в моделируемой системе. Это произошло следующим образом. Исходным моментом было стремление страны К "конвертировать" свою военную мощь в экономическое преимущество и проистекающее отсюда "резкое", "агрессивное" поведение во внешнеполитической области, стремление изгнать страну Г из пограничных с ней областей, принадлежащих стране В, с ценными природными ресурсами и заменить страну Г своим присутствием в этих областях. Это было воспринято странами В и Г как подготовка к войне, хотя никаких конкретных планов на этот счет страна К не имела. Страны Г и В объединились в блок и произвели конверсию части мирных фондов в военные. Узнав об этом через некоторое время (по сценарию страны получали от посредников данные об экономическом и военном развитии друг друга с временной задержкой) страна К сочла, что к войне готовится блок В и Г, поскольку, произведя конверсию мирных фондов эти страны уже никак не могли выиграть, если иметь в виду сценарное условие выигрыша. Единственным выходом из создавшейся ситуации страна К сочла немедленное начало войны, так как через некоторое время военное преимущество блока В и Г неизбежно стало бы подавляющим.

Описанный фрагмент игры интересен тем, что "анатомирует" взаимоотношения стран, выявляет причины военного конфликта, произошедшего в виртуальном "мире", где каждый участник стремился увеличить благосостояние своего народа, где никто к войне намеренно не стремился и, тем не менее, она произошла. Ее причины состоят в авантюрном характере внешней политики, проводившейся одной из стран, имеющей целью получить экономические преимущества, в страхе, который вызвала эта политика, в неверной оценке каждой страной мотивов в силу которых действовали другие страны и целей, которые другие страны преследовали. По нашему мнению, механизм развития конфликта, который реализовался в процессе имитационной игры, фрагмент которой был описан, в настоящее время не исключен полностью из жизни мирового сообщества. Механизм развития Карибского кризиса содержал моменты, в некоторых аспектах перекликающиеся с описанным механизмом.

Запрет Главлита СССР на публикацию результатов описанного исследования задержал развитие исследований проблем безопасности, геополитики, межгосударственных отношений методом имитационных игр. Запреты на публикации исчезли "естественным образом" в конце восьмидесятых годов и исследования в этой области возродились. Они поддерживаются периодически как государственными, так и частными организациями. В рамках этих исследований разрабатывались различные варианты математических моделей экономического и военного функционирования государств, более подробные, чем те, которые лежали в основе первой игры, описанной выше, организовывались и проводились имитационные игры с разным составом участников.

Коротко опишем характер, некоторые результаты и интересные моменты, связанные с проведенными имитационными играми. Декларируемые цели исследований носили прикладной характер. Если суммировать цели, которые ставились в различных конкретных исследованиях, то получится следующий их список.

А) Разработка и накопление математических моделей разного уровня, описывающих экономическое и военное функционирование государств.

В) Разработка инструментальных средств имитационного моделирования, позволяющих хранить программы, реализующие различные модели, легко организовывать из них необходимые для различных имитационных экспериментов взаимосвязанные комплексы программ, поддерживать выполнение имитационных экспериментов, т.е. обрабатывать и визуализировать результаты, иметь диалоговый сетевой режим проведения имитационных экспериментов, хранить результаты выполненных имитационных экспериментов.

С) Разработка и накопление программ, реализующих различные модели в рамках инструментального комплекса имитационного моделирования, о котором шла речь в пункте В).

Д) Разработка сценариев и проведение имитационных игр, преследующих конкретные цели.

Е) Разработка программного обеспечения и сценариев имитационных игр, предназначенных для использования в учебном процессе на факультетах прикладной математики в рамках курсов по имитационному моделированию.

Вместе с перечисленными выше, вполне достижимыми целями прикладного характера преследовались также цели, наличие которых позволяют относить проведенные исследования к фундаментальным. Таковыми целями являлись разработка технологии анализа проблем геополитики и безопасности, прогноза развития межгосударственных отношений в мировом сообществе, объединяющей возможности гуманитарных и формальных средств анализа. В более общем плане – разработка методов прогнозирования сложных социально-экономических процессов, синтезирующих гуманитарные и математические методы. Элементом этой технологии является метод анализа и отработки сценариев. Он состоит в "превращении" сценариев развития изучаемого процесса, которыми оперируют политологи (см. выше), в сценарии имитационных игр, организацию и проведение игр, уточнении на этой основе гуманитарных политологических сценариев, организации и проведении новых игр по этим сценариям и т.д. Этот процесс уточнения исходных сценариев называется их "отработкой". Практический эффект отработок сценариев должен состоять в том, что любая кри-

тическая ситуация, возникающая при управлении процессом, заранее изучена, варианты выхода из нее заранее отработаны и хранятся в соответствующей базе данных.

Обращение к имитационным играм в методе анализа и отработки сценариев может происходить не только со стороны профессионального политологического анализа, но и с "противоположной" стороны – как "развертывание" оптимизационных и теоретико-игровых схем в более подробные модели с целью уяснить в какой мере справедливы рекомендации, полученные на базе этих схем.

В качестве примера приведем результаты некоторых конкретных исследований в области проблем стратегической стабильности в мире и национальной безопасностью России, полученных с помощью элементов метода отладки и отработки сценариев. В этих исследованиях сценарии имитационных игр извлекались не из гуманитарных сценариев (см. ниже), а из исследования теоретико-игровых схем, посвященных вопросам существования устойчивых состояний в играх [5]. Анализ хода имитационных игр вместе с результатами исследования теоретико-игровых схем позволили сделать следующие выводы:

а) Традиционный подход к проблеме стратегической стабильности и национальной безопасности, восходящий к Р.Макнамаре и основанный на понятии непремлимого ущерба, наносимого в ответном ядерном ударе страной, подвергшейся нападению с применением ядерного оружия, в настоящее время становится все более недостаточным, что определяется следующими обстоятельствами: - разрушением двухполюсной геополитической структуры; - принципиальным недостатком понятия неприемлимого ущерба: учет экологических последствий ядерной войны говорит о том, что обезоруживающий первый ядерный удар принесет неприемлимый ущерб той стороне, которая его нанесла, даже если противная сторона никак на него не ответит; - неучетом в обсуждаемом подходе экономических интересов стран в условия их мирного развития.

б) Наиболее адекватной трактовкой понятия "национальная безопасность" является ситуация, когда военная мощь и благосостояние народа данного государства превышают некоторые пороговые значения.

в) Если национальная безопасность всех государств в их системе обеспечена, то ситуация стратегической стабильности есть ситуация такого баланса экономических и военных интересов сторон, от которой им невыгодно отступать, если все остальные страны его придерживаются.

г) Существенным фактором, обеспечивающим стабильность развития мирового сообщества является правильная оценка странами мотивов и целей, в соответствии с которыми действуют другие страны. Дестабилизирующим фактором является отсутствие у государств четко осознанных и объявленных целей, отсутствие приемственности при смене политического руководства, наличие у политических деятелей качества, именуемого "непредсказуемостью".

д) Существенным фактором в обеспечении стабильности является правильная оценка странами военной мощи как своей собственной, так и других стран, возможность адекватно прогнозировать развитие вооруженных конфликтов и их политических последствий.

е) Чем меньше уровень конфронтационности, противоположности между интересами, целями стран, тем более высокий уровень информированности их о вооружениях друг друга им выгоден.

ж) Точное знание странами уровней вооружения друг друга и их эффективности, а также способность адекватно прогнозировать развитие вооруженных конфликтов не только блокирует гонку вооружений, но и создает тенденцию гонки разоружения в системе, где страны не собираются вести наступательные войны друг с другом ни поодиночке ни в коалициях.

Остановимся более подробно на последнем выводе. Схема тенденции гонки разоружения, возникающий, если страны имеют совершенно точную информацию о вооружениях и могут совершенно адекватно прогнозировать развитие вооруженных конфликтов весьма проста. Хорошо известно, что при вооруженной борьбе наступление требует больше сил, чем оборона. Для того, чтобы рассуждения были максимально просты, но в то же время суть дела не была потеряна, можно рассмотреть систему совершенно одинаковых в начальный момент стран в экономическом и военном отношениях, причем каждая страна не собирается вести наступательные войны ни поодиночке ни в коалициях. Некоторое государство в такой системе может без ущерба для своей безопасности уменьшить количество своих вооружений до уровня, обеспечивающего сдерживание противника при обороне, если оно уверено, что другие страны не могут объединиться в коалицию против нее с целью вести наступательную войну. Но тогда оно получает, при прочих равных условиях, экономическое преимущество, поскольку освободившиеся средства может направить на экономическое развитие. Это создает в рассматриваемой системе стимул для других стран также уменьшать расходы на вооружения. Конечно, это - лишь схема, которая может никогда не реализоваться на практике (см. ниже).

Привлечь к исследованиям в рамках метода анализа и отработки сценариев сферу гуманитарного политологического анализа не удалось. Таковое привлечение является трудной проблемой и требует разработки специальной технологии. Основы этой технологии разработаны, однако их изложение выходит за рамки данных лекций. На все рекомендации и выводы, полученные вне этой сферы, "не пропущенные" сквозь нее необходимо смотреть как на некоторые гипотезы. Средства математического моделирования являются лишь инструментом, которым нужно учиться пользоваться совершенно также, как нужно учиться пользоваться любым другим инструментом в любой другой сфере деятельности. Неправильное использование любого инструмента в любой сфере деятельности приносит, естественно, не пользу, а вред, тем большую, чем мощнее инструмент (см. лекции 1.2.3). Без определенного уровня образованности и культуры во всех структурах, имеющих отношение к принятию решений в области геополитики и безопасности (как и в других сферах), использовать технологии анализа и прогноза, основанные на математическом моделировании, нельзя. К счастью, впрочем, это и невозможно: как показывает практика, организации, люди в которых не обладают достаточным уровнем образования и культуры для того, чтобы научиться использовать технологии в области анализа и прогноза, основанные на математическом моделировании, отторгают эти технологии, относятся к ним как к игрушкам. Это отторжение реализуется в форме отношения к тем специалистам в этих организациях, которые пытаются использовать эти технологии.

С другой стороны, консервативность сферы принятия решений в области геополитики и безопасности (как и в других областях) естественна и необходима. Все выводы в области геополитики

и безопасности, которые получаются с применением средств математического моделирования, если они верны, можно получить и без них – обычными средствами гуманитарного анализа. Если же их нельзя получить, понять, осознать обычными средствами, то они неверны. Зачем тогда средства формального анализа нужны? Этот вопрос совершенно аналогичен вопросу – зачем нужны современные средства строительной индустрии? Все можно построить и без них. Египетские пирамиды, например, построили без всяких средств строительной индустрии. Бессмысленность таких вопросов очевидна; еще раз хотим обратить внимание на то, что средства формального анализа и технология анализа и прогноза, объединяющая возможности формальных и гуманитарных методов, являются инструментами, использование которых может позволить глубже понимать то, что происходит, принимать более обоснованные и эффективные решения, что есть аналог увеличения производительности труда в других сферах, достигаемый использованием в них соответствующих инструментов. Однако, наибольшее значение (это относится к любой сфере деятельности) имеет не то, что использование некоторых инструментов позволяет более эффективно делать что уже делается, а то, что инструменты позволяют сделать, что без них сделать невозможно. Должен существовать механизм проверки инструментов, появляющихся в обсуждаемой сфере, механизм обучения пользованию ими, соответствующая инфраструктура - совершенно также как и в любой другой сфере деятельности.

Сделаем теперь несколько замечаний, являющихся результатом взгляда на межгосударственные отношения в современном мире с той позиции, в которой находится исследователь, занимающийся их изучением методом анализа и отработки сценариев. Представляется, что характер межгосударственных отношений все менее соответствует характеру современной мировой экономической системы и характеру вооружений, которыми располагают государства, и если межгосударственные отношения не претерпят существенных изменений, в будущем нас ожидает мрачная картина, нарисованная в [6]: деление государств на развитых, благоденствующих и неразвитых – нищенствующих, высасывание из неразвитых стран всех видов ресурсов, в том числе – интеллектуальных, превращение неразвитых стран в свалку отходов и т.д..

Если сравнивать межгосударственные отношения с отношениями между людьми, то межгосударственным отношениям в значительно меньшей степени присуще то, что в отношениях между людьми именуется нравственными и этическими нормами, которые можно трактовать как элементы гомеостаза, самосохранения. Иногда кажется, что межгосударственные отношения в современном мире ближе к отношениям в стаде обезьян, чем к отношениям в самом примитивном человеческом обществе.

Между тем, в современном мире члены мирового сообщества не могут обеспечить ни свою национальную безопасность ни экономическое процветание, игнорируя безопасность других ее членов, а также проблемы глобальной общечеловеческой безопасности – как экологической безопасности, связанной с воздействием на окружающую среду хозяйственной деятельности человека, так и социальной безопасности, связанной с возникновением вооруженных конфликтов с применением ядерного и химического оружия. Таковое игнорирование будет приводить не к увеличению, а к уменьшению

их безопасности, создавая механизм дестабилизации, механизм увеличения вероятности возникновения вооруженных конфликтов между странами, а, значит, фактического увеличения количества конфликтов, механизм увеличения вероятности глобальной военной катастрофы. Метод имитационных игр - это один из инструментов, с помощью которого можно спроектировать и до определенной степени испытать механизмы стабилизации в жизни мирового сообщества [7].

В проблемах безопасности на первом месте по значимости сейчас стоит информационный аспект. Выше уже говорилось, что точное знание странами количества и эффективности вооружений друг друга и возможность адекватно, совершенно точно прогнозировать развитие вооруженных конфликтов создает тенденцию гонки разоружения. Утрируя ситуацию, чтобы подчеркнуть существо дела, можно сказать, что возможность совершенно точно прогнозировать развитие вооруженного конфликта (конечно, в реальности это недостижимо, а в имитационных играх – достижимо; это обстоятельство характеризует возможности, которыми обладает метод имитационных игр) создает механизм замены реальной вооруженной борьбы ее имитацией. Подчеркнем, однако, что этот механизм действует при условии, что страны действительно не собираются вести наступательные войны друг с другом.

Начинать эволюцию характера межгосударственных отношений в нужную сторону надо с введения в международное право нормы общего характера, суть которой состоит в том, что, если кто-либо имеет возможность произвести какое-либо глобальное воздействие и тем самым повлиять на жизнь всех людей, то об этом мировое сообщество должно быть по крайней мере информировано. Скрытие такого рода информации следует объявить тяжким преступлением против человечества, влекущим жесткие санкции. Это совершенно очевидное с точки зрения общечеловеческой морали положение не соответствует современному характеру межгосударственных отношений, не соответствует тому, что считается "нормой" в этих отношениях. Между тем, оно ведет к важным и нетривиальным последствиям. Его применение означает, например, открытие всей информации о наличии у стран ядерного и химического оружия и введение жестких санкций против тех государств, которые скрывают такую информацию.

Более обще, всякая человеческая деятельность, могущая повлиять на общепланетарные процессы, должна контролироваться и координироваться на основе адекватной ей глобальной информационной системы, находящейся под юрисдикцией международных организаций и это должно быть закреплено соответствующими нормами международного права. Начало такой информационной системы может быть положено, если разведывательные и природоресурсные космические системы США России, ведущие в настоящее время космический контроль в собственных интересах, будут синтезированы, поставлены под международный контроль, финансироваться международным сообществом, а соответствующая информация станет всеобщим достоянием.

Литература

1. Венцель Е.С. Исследование операций. М.: Советское радио, 1972, 552 с.
2. Иванилов В.Ю., Огарышев В.Ф., Павловский Ю.Н. Имитация конфликтов. М.: ВЦ РАН, 1993,

196 с.

3. Павловский Ю.Н. Имитационные системы и модели. М.: Знание, 6/1990, гл. 1, с. 7-27.
4. Павловский Ю.Н. Методические вопросы разработки системы математических моделей, предназначенных для исследования проблем стратегической стабильности, национальной безопасности, строительства вооруженных сил. В кн. Стратегическая стабильность межгосударственных отношений и безопасность России. М.: ВАГШ, 1993. С.22-29.
5. Горелик В.А., Горелов М.А., Кононенко А.Ф. Анализ конфликтных ситуаций в системах управления. М.: Радио и связь, 1992, 288 с.
6. Моисеев Н.Н. Агония России. Есть ли у нее будущее?. Попытка системного анализа проблемы выбора. Зеленый мир. N 12. 1996 г.
7. Моисеев Н.Н. Алгоритмы развития. М.: Наука. 1987. 304 с.

Лекция 8. Примеры математических моделей.

Простейшая модель коллективного поведения П.С. Краснощекова.

1. Достаточно часто возникают ситуации, когда имеется коллектив (группа, общество) каждый член которого может находиться только в двух состояниях (работает — ленится, поддерживает политика А — поддерживает политика Б, участвует в выборах — не участвует в выборах, голосует "за" — голосует "против" и т.д.), причем он сам решает, в каком именно из этих двух состояний ему находиться. Изучается случай, когда на решение каждого члена коллектива о выборе приемлемого для него состояния оказывают влияние все другие члены этого коллектива. Пусть число членов коллектива равно N . Предполагается, что это число "достаточно велико". Выделим из двух состояний, в которых могут находиться члены коллектива, какое-то одно, которое далее именуется "данное состояние", и будем интересоваться количеством индивидуумов, которые находятся в этом состоянии. Каждому индивидууму припишем номер j , $j = 1, 2, \dots, N$. Относительно индивидуума с номером j предположим, что, если бы он не имел никакой информации о том, сколько людей в коллективе находятся в данном состоянии, то вероятность нахождения его самого в данном состоянии была бы равна a_j . Таким образом, $0 \leq a_j \leq 1$. Будем считать, что кроме числа a_j , каждого индивидуума характеризует также число $0 \leq \mu_j \leq 1$, описывающее в какой мере на решение индивидуума находится в данном состоянии влияет информация о том, сколько других членов коллектива находятся в данном состоянии. Будем считать, что $\mu_j = 0$ означает максимальную степень такого влияния, а $\mu_j = 1$ — отсутствие такого влияния. Характеристика μ_j , повидимому, имеет некоторое отношение к тому, что называют "харизмой" индивидуума. Значение $\mu_j = 1$ этой характеристики означает, что отношение данного индивидуума к состоянию, о котором идет речь, определяется некоторым чисто внутренним механизмом, причем на функционирование этого внутреннего механизма и на принимаемые им решения не влияет отношение к данному состоянию других людей.

Обозначим через P_j "финальную" вероятность (т.е. после получения информации о поведении всех других членов коллектива) для индивидуума с номером j оказаться в данном состоянии. Постулируем следующую связь между введенными характеристиками изучаемой ситуации:

$$P_j = \mu_j a_j + (1 - \mu_j) \Delta_j, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

где Δ_j — доля членов коллектива, пришедших в данное состояние. Содержательно соотношение (1) означает, что вероятность оказаться в данном состоянии у индивидуума j является средневзвешенной величиной его между априорной вероятностью оказаться в данном состоянии и долей остальных членов коллектива, пришедших в данное состояние, с весовыми коэффициентами μ_j и $1 - \mu_j$.

Воспользуемся теперь предположением о том, что число членов коллектива "достаточно" велико и заменим долю Δ_j ее математическим ожиданием, которое, очевидно, равно

$$\Delta_j = \frac{1}{N-1} \sum_{i \neq j} P_i \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1) получим замкнутую модель изучаемой ситуации:

$$P_j = \mu_j a_j + \frac{1 - \mu_j}{N - 1} \sum_{i \neq j} P_i, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (3)$$

Внутренними, т.е. подлежащими определению характеристиками в соотношениях (3) модели, являются P_j , $j = 1, 2, \dots, N$. Внешними характеристиками модели являются a_j и μ_j . Система уравнений (3) является системой из N линейных алгебраических уравнений с N неизвестными. Нас интересуют не все значения неизвестных характеристик, фигурирующих в этой системе, а математическое ожидание $M = \sum_{i=1}^N P_i$ количества членов коллектива, оказавшихся в данном состоянии. Поскольку $M - P_j = \sum_{i \neq j} P_i$, то из (3) вытекает

$$P_j = \mu_j a_j + \frac{1 - \mu_j}{N - 1} (M - P_j), \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

или

$$P_j = \frac{N - 1}{N - \mu_j} \mu_j a_j + M \frac{1 - \mu_j}{N - \mu_j}, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (4)$$

Просуммируем левые и правые части соотношений (4) по j от 1 до N . Получим соотношение

$$\frac{M}{N} = \frac{\sum_{j=1}^N \frac{\mu_j a_j}{N - \mu_j}}{\sum_{j=1}^N \frac{\mu_j}{N - \mu_j}} \quad (5)$$

Число $\frac{M}{N}$ является долей членов коллектива, пришедших в данное состояние. Предложенная модель основана на примитивном здравом смысле. Рассмотрим несколько простых примеров, и попытаемся дать содержательную интерпретацию результатов, которые дает модель в этих случаях. Прежде, чем приступать к анализу упростим выражение (5). Именно, поскольку число N считается достаточно большим, а $0 \leq \mu_j \leq 1$, то $N - \mu_j \approx N$. Поэтому можно считать

$$\frac{M}{N} = \frac{\sum_{j=1}^N \mu_j a_j}{\sum_{j=1}^N \mu_j} \quad (6)$$

Первая ситуация, которая будет рассмотрена, характеризуется как "лидер в абсолютно зависимом коллективе". Это означает, что в данном коллективе есть ровно один абсолютно "независимый" индивидуум, т.е. индивидуум со значением $\mu_j = 1$, а у всех остальных членов коллектива $\mu_j = 0$. Пусть это будет индивидуум с номером $j = 1$. Пусть он четко ориентирован по отношению в данному состоянию, т.е. или $a_1 = 1$ или $a_1 = 0$. Имеем $\mu_1 = 1$, $\mu_j = 0, j = 2, \dots, N$ и из (6) вытекает, что все члены коллектива ведут себя точно также, как лидер: если $a_1 = 1$, то $M/N = \mu_1 a_1 / \mu_1 = 1$, если $a_1 = 0$, то $M/N = \mu_1 a_1 / \mu_1 = 0$.

Следующая ситуация — два лидера, которые придерживаются абсолютно противоположных взглядов, в абсолютно зависимом коллективе. Пусть первый лидер имеет номер $j = 1$, второй — $j = 2$. Имеем $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $\mu_j = 0, j = 3, 4, \dots, N$, $\mu_1 \neq 0, \mu_2 \neq 0$. Из формулы (6) получаем:

$$\frac{M}{N} = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \quad (7)$$

Если трактовать μ_1 и μ_2 как "степени харизматичности" лидеров, то формула (7) отражает тот факт, что доли членов коллектива, поддерживающих лидеров, пропорциональны степеням

харизматичности лидеров. Если, в частности, каждый из них харизматичен абсолютно, т.е. $\mu_1 = \mu_2 = 1$, то $M/N = 1/2$, т.е. коллектив будет разделен ровно пополам.

Пусть теперь в коллективе кроме двух лидеров появился еще третий. Пусть он имеет номер $j = 3$. Имеем $\mu_3 \neq 0, 0 < a_3 < 1$. Из (6) следует, что первого лидера будет поддерживать, т.е. придет в данное состояние доля

$$\frac{M}{N} = \frac{\mu_1 + \mu_3 a_3}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}$$

членов коллектива, а второго лидера будет поддерживать

$$1 - \frac{M}{N} = \frac{\mu_2 + \mu_3(1 - a_3)}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}$$

Изучим влияние третьего лидера на величину $\frac{M}{N}$. Для этого рассмотрим разность

$$\frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} - \frac{\mu_1 + a_3 \mu_3}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}$$

Эта разность равна

$$\frac{\mu_3}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3} (\mu_1 - a_3(\mu_1 + \mu_2))$$

Отсюда следует, что, если a_3 удовлетворяет соотношению

$$\frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} < a_3 < 1, \quad (8)$$

то

$$\frac{\mu_1 + a_3 \mu_3}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3} > \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \quad (9)$$

Таким образом, при выполнении соотношения (8) третий лидер "работает" на первого, при выполнении соотношения

$$0 < a_3 < \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \quad (10)$$

третий лидер "работает" на второго. Если же

$$a_3 = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \quad (10)$$

то третий лидер не оказывает никакого влияния на ситуацию. В частности, если два первые лидера одинаково независимы, т.е. $\mu_1 = \mu_2$, то третий лидер не оказывает влияния на ситуацию, когда $a_3 = 1/2$. Соотношение $a_3 = 1/2$ можно трактовать как "абсолютно центристскую" позицию третьего лидера. Таким образом, при одинаковой независимости двух лидеров в абсолютно зависимом коллективе абсолютно центристская позиция абсолютно неэффективна.

Сделаем некоторые общие выводы из выполненного анализа. Этот анализ свидетельствует о том что, если в обществе есть лидер ($\mu_1 = 1, a_1 = 1$), то общество безоговорочно поддерживает лидера лишь в двух крайних случаях. Первый случай — это когда общество имеет "стадную" ментальность и оно идет за лидером как скот идет на бойню за козлом — "провокатором". Второй случай — когда это общество единомышленников. Поскольку ситуации, когда все общество разумно поддерживает лидера крайне маловероятна, то у лидера возникает соблазн избавиться от независимых и инакомыслящих ($\mu_j = 1, a_j = 0$). Формы, в которых осуществляется это избавление,

могут быть самые разнообразные. Эти формы существенно зависят от социально-экономического устройства общества, от степени властных полномочий, которыми обладает лидер и т.д.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда в однородном коллективе, состоящим из индивидуумов, которые не являются абсолютно зависимыми, имеется лидер, четко ориентированный на данное состояние. Пусть номер лидера есть $j = 1$. Однородность коллектива означает, что $\mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_N = \mu$ и $a_2 = a_3 = \dots = a_N = a$. Четкая ориентированность лидера на данное состояние означает, что $\mu_1 = 1, a_1 = 1$. Будем считать, что в рассматриваемом случае не обязательно $N \gg 1$. Тогда для расчета характеристики M/N необходимо пользоваться формулой (5). Применяя эту формулу получим

$$\frac{M}{N} = \frac{N - \mu + a\mu(N - 1)^2}{N - \mu + \mu(N - 1)^2} \quad (11)$$

Если положить в этой формуле $\mu = 0$, то

$$\frac{M}{N} = 1,$$

что соответствует полученному выше результату о лидере в абсолютно зачисимом коллективе.

Пусть $\mu \neq 0$. Если в (11) N к бесконечности, то получим

$$\lim \frac{M}{N} = a.$$

Это означает, что в очень большом коллективе, члены которого не являются абсолютно зависимыми, влияние лидера на членов коллектива ничтожно мало. Интересно вычислить такие значения N , при которых "приемлемое" число Q членов коллектива придерживается позиции лидера. Пусть, например, $Q = 3/4$ и коллектив состоит из "средних" людей, т.е. $a = 1/2$ и $\mu = 1/2$. Тогда для N получается уравнение $N^2 - 4N + 2 = 0$ и, таким образом, $N = 3$. При $Q = 2/3$ получается $N = 6$, при $Q = 1/2$ N может быть каким угодно, т.е. в большом коллективе при одном начальнике половина членов коллектива всегда будут бездельничать.

Пусть имеется парламент с N членами, среди которых q составляют правительственную партию, p — оппозицию, а остальные $r = N - q - p$ составляют так называемое "болото". Пусть у членов правительственной партии $\mu_j = 1, a_j = 1$, у членов оппозиции $\mu_j = 1, a_j = 0$. Будем считать, что болото однородно, т.е. для всех членов болота $\mu_j = \mu, a_j = a$. Пусть происходит голосование по законопроекту, предложенному правительством. Из формулы (6) получим

$$\frac{M}{N} = \frac{q + \mu ar}{p + q + \mu r} \quad (12)$$

Если у болота $\mu = 0$, то формула (12) принимает вид

$$\frac{M}{N} = \frac{q}{p + q} = c \quad (13)$$

Приведем пример идентификации модели по результатам голосования по одному из вопросов на 3-ем съезде народных депутатов в 1990 году. Изучение материалов съезда показывает, что на этом съезде при общей номинальной численности в 2000 человек "партия президента" составляла 1000 человек ($q = 1000$), оппозиция президенту составляла 250 человек ($p = 250$), а остальные составляли болото.

Результаты голосования по одному из вопросов, где имела место конфронтация между партией президента и оппозицией: за президента — 1538, против президента — 374, воздержались — 47. Поскольку в излагаемой модели рассматриваются индивидуумы, которые обязательно находятся в одном из двух взаимоисключающих друг друга состояний, членов съезда, которые воздержались при голосовании, необходимо исключить из анализа. Таким образом, данные съезда дают:

$$\frac{M}{N} = \frac{1538}{1912} = 0.804$$

С другой стороны, формула (13), соответствующая значению $\mu = 0$ у болота дает

$$\frac{M}{N} = \frac{q}{p+q} = \frac{1000}{1250} = 0.8$$

Таким образом, гипотеза о том, что болото на 3-ем съезде состояло из абсолютно зависимых людей имеет право на существование.

Литература

Краснощеков П.С., Петров А.А. Принципы построения моделей. М.: Фазис. 2000. Глава 12. С. 380-404.

Лекция 9. Пример анализа и прогноза сложного процесса с помощью математических и гуманитарных средств: обсуждение механизма ядерного сдерживания.

С момента появления ядерного оружия не были отмечены вооруженные конфликты между государствами, им обладающими, а масштабы вооруженных конфликтов между государствами, не обладающими ядерным оружием, не выходят за пределы региональных, несмотря на то, что практически любой конфликт такой конфликт в силу глобального характера современной экономики, затрагивает интересы и ядерных стран. Этот объясняется тем, что одновременно с ядерным оружием возник механизм ядерного сдерживания. Он не позволяет государствам, обладающим ядерным оружием, обострять отношения до такой степени, что вооруженный конфликт между ними становится возможным. Существование механизма ядерного сдерживания — очевидный факт, неоднократно отмечавшийся политиками и анализировавшийся политологами.

Механизм ядерного сдерживания анализируется в настоящей лекции гуманитарными средствами, однако, с помощью понятий и представлений, которые являются достижением математической теории управления, теории игр, исследования операций, а также с помощью понятий и представлений возникших в результате построения и анализа математических моделей вооруженных конфликтов, математических моделей, позволивших прогнозировать экологические последствия вооруженных конфликтов с применением ядерного оружия, и имитационных математических моделей сложных управляемых процессов. Эти понятия и представления и эти результаты являются инструментами анализа и прогноза, выполняемого в лекции.

Имеющийся опыт свидетельствует, что те инструменты, которые сфера математического моделирования может предоставить специалистам гуманитарного профиля уже сейчас, будут использоваться как рабочие инструменты только специалистами следующего поколения. Во-первых, гуманитарии могут использовать результаты математического моделирования только после их многократной проверки, тогда, когда адекватность моделей становится общепризнанным фактом. Во-вторых, нужно время, чтобы овладеть новыми инструментами. Главное же состоит в том, что речь идет об инструментах (и это относится к любой сфере деятельности), которые позволяют не просто сделать лучше и дешевле (очень часто дело обстоит как раз наоборот) то, что уже умеют делать, а то, что без их помощи сделать нельзя. То есть, они меняют структуру и потребительские качества того, что производится. В существующей структуре производства и потребления чем квалифицированнее специалист, т.е. чем лучше он владеет существующими инструментами и чем более качественные вещи он производит, тем менее он испытывает потребность в новых инструментах, с помощью которых в его сфере деятельности можно производить какие-то другие вещи. (С одной стороны, деревенскому плотнику не нужны современные средства строительной индустрии для того, чтобы построить деревенский дом из бревен. С другой стороны, современные средства строительной индустрии не приспособлены для строительства деревенских домов из бревен: с их помощью производятся другими способами другие вещи.)

Анализ механизма ядерного сдерживания и его эволюции начнем с рассмотрения психологи-

ческих факторов в вооруженной борьбе. Затем перейдем к обсуждению четырех, на наш взгляд, наиболее существенных аспектов механизма ядерного сдерживания. Первый связан с представлениями о ценности человеческой жизни, распространенными в обществе, второй — с отсутствием в настоящее время эффективных средств защиты от ядерного оружия, третий — с катастрофическими последствиями применения ядерного оружия, которые будут иметь место во всех сферах жизни государств, в том числе в экономике и экологии, четвертый — (его можно охарактеризовать как "информационный") с возможностью адекватного прогноза последствий использования ядерного оружия. Все эти аспекты, естественно, взаимосвязаны, их выделение в виде отдельных составных частей есть, в известной мере, приближенная декомпозиция единого механизма самосохранения, возникшего в жизни мирового сообщества вместе с появлением ядерного оружия, представляющего угрозу его существованию.

Психологические факторы в вооруженной борьбе.

В настоящее время вооруженные силы практически всех государств являются хорошо структурированной организационно - технической системой, т.е. совокупностью взаимно обеспечивающих друг друга технических средств разнообразного характера и иерархической управляющей организации. Если, наблюдая некоторый реальный управляемый процесс, мы видим в нем "структуру", то это означает, что имеются механизмы, поддерживающие эту структуру. Это утверждение является выводом общего характера из математической теории управления. Вооруженный конфликт группировок двух противников, имеющих современную структуру вооруженных сил, может продолжаться только до тех пор, пока оба противника способны своими управлениями поддерживать эту структуру, обеспечивая должную работу всех ее взаимосвязанных элементов. (Нельзя воевать, например, не имея информации о противнике и, если её нет, её необходимо получить, затратив на это необходимые силы и средства. Нельзя воевать без связи и, если связи нет, то ее нужно восстановить, истратив на это соответствующие силы и средства. В равной мере нельзя воевать, не имея боезапаса, и, если его нет, то необходимо организовать его подвоз, истратив на это соответствующие силы и средства. И так далее. Обеспечение должной работы сложного внутреннего механизма вооруженных сил - существенная составная часть усилий военачальников.)

Внесение предположения о сохранении структуры вооруженных сил в современные модели вооруженной борьбы приводит к декомпозиции этих моделей, состоящей в том, что от сложных уравнений, описывающих происходящие при боевых действиях процессы взаимного уничтожения разнородных сил и средств конфликтующих противников, процессы перемещения войск, процессы сбора, передачи, хранения, обработки информации, процессы принятия решений, процессы материально-технического обеспечения, отделяется простая модель, описывающая процесс выхода из строя людей в ходе боевых действий.

Эта модель имеет следующий вид

$$\dot{m}_1 = -k_2 m_2, \quad \dot{m}_2 = -k_1 m_1.$$

Здесь $m_1(t)$, $(m_2(t))$ - общее количество людей в составе 1-ого (2-ого) противника, сохранившихся

к моменту t и должным образом выполняющих в этот момент свои функции в структуре вооруженных сил. В число $m_1(t)$, $(m_2(t))$ входит любой человек, выполняющий в вооруженных силах в процессе боевых действий некоторую функцию, у которого есть заметная вероятность быть убитым или раненым. В левой части первого (второго) уравнения фигурирует величина \dot{m}_1 (\dot{m}_2), которая есть уменьшение в единицу времени людей, должным образом выполняющих свои функции, в составе первого (второго) противника, происходящее из-за того, что конфликтующие противники стреляют друг в друга разнообразными имеющимися у них средствами. Величина k_2 , (k_1) - в правой части первого (второго) уравнения означает количество людей в составе первого (второго) противника, которое выводится из строя в единицу времени в расчете на одного человека в составе второго (первого) противника. Таким образом, произведение, фигурирующее в правой части первого (второго) уравнения, есть количество людей в составе первого (второго) противника, которое выводится из строя в единицу времени, т.е. как раз то, что фигурирует в левой части этого уравнения. (Приведенные выше уравнения появились еще в начале века, как описание боевых действий, которые ведутся неструктурированными вооруженными силами, т.е. некоторыми однородными с каждой стороны боевыми единицам, и называются уравнениями Ланчестера.)

Величина k_1 , (k_2) характеризуют эффективность структуры вооруженных сил первого (второго) противника. Далее эти величины будут называться обобщенными коэффициентами эффективности. До тех пор, пока оба конфликтующих противника способны поддерживать должную структуру своих вооруженных сил (у каждого из противника она своя), есть достаточные основания считать их приблизительно постоянными.

Чисто математический анализ приводит к выводу о том, что, если величины $m_1(t_0)\sqrt{k_1}$, $m_2(t_0)\sqrt{k_2}$, которые принято называть эффективными или приведенными начальными численностями противников, не равны, то существует момент времени, когда в составе одного из противников, того именно, начальная эффективная численность которого меньше, людей, должным образом выполняющих свои функции, не останется, в то время как у другого они будут. Таким образом, если бы вооруженный конфликт продолжался до полного истребления людей одного из противников и если бы уравнения (1,2) были адекватны при любой численности людей в составах противников, то в нем победил бы тот, у кого начальная эффективная численность больше.

Конечно, уравнения (1,2) становятся неадекватными, когда количество людей в составе одного из противников становится заметно меньше их первоначальной (номинальной) численности. Однако, вооруженные конфликты продолжаются до полного истребления людей в составе одного из противников настолько редко, что становятся, как правило, достоянием истории (триста спартацев,..., двадцать восемь панфиловцев). Гораздо раньше войска одного из противников оказываются не в состоянии продолжать боевые действия. (Потери русской армии в Бородинском сражении составили около 30% её численности перед сражением, потери французской армии — около 25%. Обе армии находились к концу сражения на грани полной потери способности воевать. Приведенные цифры являются характерными: необходимо исключительное стечение обстоятельств для того, чтобы люди могли выдержать потери более 25% от номинальной численности.) Причина состоит

в том, что у одного из противников исчерпывается "желание драться и подвергать себя опасности", нести потери, в то время как второй сохраняет такую способность. Эту ситуацию принято также характеризовать как "потерю боеспособности" у одного из противников. Люди в структуре вооруженных сил того противника, который потерял боеспособность, перестают должным образом выполнять свои функции не потому, что они убиты или ранены, а потому что они не в состоянии более воевать. Боеспособность людей, участвующих в вооруженном конфликте, можно считать элементом структуры вооруженных сил, причем главным элементом этой структуры, подлежащим сохранению в первую очередь.

Простейшая формализация условия сохранения боеспособности людей, участвующих в вооруженном конфликте, состоит во введении характеристик φ_1 и φ_2 противников, могущих принимать значения в интервале $[0,1]$ и имеющих следующий смысл: когда в процессе боевых действий величина $m_1(t)/m_1(t_0)$ ($m_2(t)/m_2(t_0)$), где $m_1(t_0)$ ($m_2(t_0)$) — численность первого (второго) противника в момент t_0 , непосредственно предшествующий началу боевых действий, достигает значения φ_1 (φ_2), т.е. относительные потери первого (второго) противника достигают значения $1 - \varphi_1$ ($1 - \varphi_2$), войска первого (второго) противника теряют боеспособность.

Чисто математическими средствами устанавливается, что, если величины $m_1(t_0)\sqrt{k_1}X_1$, $m_2(t_0)\sqrt{k_2}X_2$ которые называются "военной силой" группировок противников (в смысле Л.Н. Толстого — см. ниже), где

$$X_1 = \sqrt{1 - \varphi_1^2}, \quad X_2 = \sqrt{1 - \varphi_2^2},$$

различны, то один из противников, именно тот, у которого "военная сила" меньше, потеряет боеспособность раньше другого. Эту ситуацию естественно трактовать как "победу" того противника, который сохранил боеспособность. Существенная сторона квалификации военачальника — "чувствовать" свои войска и не доводить дело до фактической потери боеспособности (что достигается разными средствами, например, отводом войск, как это сделал, например, М.И. Кутузов после первого дня Бородинского сражения), чреватой тем, что на военном языке именуется "разгромом".

Итак, "военная сила" противников, от которой существенно зависит исход боевых действий, ведущихся группировками конфликтующих противников, характеризуется числами

$$m_{10}(0)k_1^{1/2}X_1 \quad m_{20}(0)k_2^{1/2}X_2$$

Величина X_1 (X_2) в была названа "фактором Л.Н. Толстого", поскольку она характеризует его "силу духа": чем больше эта величина, тем больше потерь (в силу ее определения) может вынести первый (второй) противник, не теряя боеспособности. Приведем цитату из, которая послужила основанием для введения терминологии, которая здесь используется.

"Сила (количество движения) есть произведение из массы на скорость.

В военном деле сила войск есть также произведение из массы на что-то другое, на какое-то неизвестное x .

Военная наука, видя в истории бесчисленное количество примеров того, что масса войск не совпадает с силой, что малые отряды побеждают большие, смутно признает существование этого неизвестного множителя и старается отыскать его то в геометрическом построении, то в вооружении, то, самое обыкновенное, — в гениальности полководцев. Но подстановление всех этих значений множителя не доставляет результатов, согласных с историческими фактами.

А между тем стоит только отрешиться от установившегося, в угоду героям, ложного взгляда на действительность распоряжений высших властей во время войны и мы отыщем этот неизвестный x .

X есть дух войска, т.е. большее или меньшее желание драться и подвергать себя опасности всех людей, составляющих войско, совершенно независимо от того, дерутся ли люди под командованием гениев или негениев, в трех или двух линиях, дубинами или ружьями, стреляющими тридцать раз в минуту. Люди, имеющие наибольшее желание драться, всегда поставят себя в наивыгоднейшие условия для драки.

Дух войска — есть множитель на массу, дающий произведение силы. Определить и выразить значение духа войска, этого неизвестного множителя есть задача науки” [13].

Дальнейший анализ будет носить гуманитарный характер. В нем в качестве инструмента будет использоваться, в частности, возникшее в процессе исследования математических моделей вооруженной борьбы представление о силе вооруженной группировки, ведущей боевые действия, как произведения $m_0\sqrt{k}X$. Величина m_0 , соответствует начальному количеству людей в группировке, величина \sqrt{k} — эффективности структуры вооружений данного противника, непосредственно зависящей от качества вооружений, а, значит, от истраченных на вооружения средств, величина x — фактору Л.Н. Толстого, показывающему, в какой мере люди, ведущие боевые действия, желают ”драться и подвергать себя опасности”. Коротко, военная сила есть произведение ”массы” на ”деньги” и на ”дух”.

Суть дальнейшего анализа состоит в установлении взаимосвязи между ”военной силой” государств и составляющими этой силы (масса - деньги - дух) и различными социально-экономическими и политическими факторами. Одна из составляющих ”военной силы” — фактор Л.Н. Толстого — зависит от многих причин и обстоятельств. Очевидно, например, что он зависит от того, ради чего данной группировкой ведется вооруженная борьба, от того, в какой мере люди в структуре вооруженных сил понимают те цели, которые преследуют политики, использующие силовые методы, в какой мере они разделяют эти цели.

Для дальнейшего анализа существенно следующее обстоятельство: чем более развито экономически государство, чем более оно демократическое, тем более высока в глазах общества цена человеческой жизни. В такой стране общество требует от политиков и военачальников вести вооруженную борьбу, если таковая происходит, с низким значением фактора Л.Н. Толстого — гораздо меньшим того, который могут вынести люди, участвующие в боевых действиях. Очевидно, что с чем более низким значением фактора Л.Н. Толстого необходимо вести вооруженную борьбу, тем выше требования к качеству вооружений, информационного обеспечения, процессу принятия решений, к

системе обучения военных специалистов, тем больше стоимость единицы материальной структуры вооруженных сил — стоимость систем вооружений и средств обеспечения вооруженной борьбы в расчете на одного человека в вооруженных силах, т.е. тем в большей степени воюют "деньгами" и тем в меньшей степени воюют "кровью". Другими словами, невысокое значение фактора Л.Н. Толстого x должно компенсироваться высоким значением обобщенного коэффициента эффективности k . Далее в статье термин "развитое в экономическом и военном отношении государство" или, для краткости, просто "развитое государство" будет использоваться для характеристики таких государств.

Четыре аспекта механизма ядерного сдерживания

Механизм уменьшения фактора Л.Н. Толстого с увеличением благосостояния общества реализуется через общественное мнение. Следовательно, действенность этого механизма определяется тем, в какой мере независимы от государственных структур средства массовой информации, которые формируют общественное мнение. Все сказанное имеет непосредственное отношение к сфере политики, потому что именно политик принимает об использовании силовых методы для достижения тех или иных целей в той или иной ситуации. Если политик принимает такое решение, то он должен иметь в виду, что боевые действия в данной ситуации должны вестись с тем значением фактора Л.Н. Толстого, какой позволен в этой ситуации имеющимися в обществе представлениями о ценности человеческой жизни и соответствующим образом рассчитывать потребные силы и средства. Если за решение проблемы силовыми методами необходимо заплатить большими потерями, чем это позволяет общественным мнением в данной ситуации, то эту проблему силовыми методами решать нельзя. В противном случае он потерпит поражение именно как *политик*, а возглавляемое им государство также потерпит поражение, т.е. вынуждено будет прекратить силовую акцию не добившись поставленных целей. предпринявший подобную силовую акцию политик сделает то, о чем в обществе говорят: "Это хуже, чем преступление".

Когда для общества становились неприемлемыми потери, которые необходимы для достижения поставленных политиками целей, прекращались силовые акции США во Вьетнаме, Советского Союза в Афганистане, России в Чечне. НАТО, выполняя какую-либо силовую акцию (например, в Югославии), вынуждено будет прекратить ее, не добившись поставленных целей, если ее людские потери превысят некоторый предел. (Что касается Югославии, то этот предел очень низок, он вряд ли превышает число 10: люди в странах НАТО готовы заплатить за права косовских албанцев некоторое количество денег, но они не готовы платить за эти права жизнями своих сограждан.) Все то же самое касается США и Ирака. (Обратим внимание на то, что упомянутые силовые акции НАТО и США имеют характер "расстрела обезоруженных", и математические модели, о которых говорилось в разделе 1, не описывают их адекватно. Тем не менее, использование представлений о военной силе группировки, ведущей боевые действия, в рамках выполняемого гуманитарного анализа вполне правомерно.) Таким образом, вероятность вооруженных конфликтов между государствами с улучшением уровня жизни их народов и увеличением степени демократизации общества уменьшается.

Что касается вооруженных конфликтов с применением тактического ядерного оружия, то такие конфликты между "развитыми в экономическом и военном отношении государствами" (см. выше значение этого термина) невозможны, поскольку характер и интенсивность потерь, которые возникают при этом, в глазах общественного мнения не могут быть оправданы никакими причинами. Данное обстоятельство способствует созданию внутригосударственного механизма гомеостаза, самосохранения: отношения между ядерными развитыми демократическими государствами не могут обостряться до такой степени, что война между ними станет возможной. Если дело идет к этому, это будет означать в глазах людей (общественного мнения), что соответствующие политики некомпетентны и их нужно заменить. Для смены некомпетентного политика в демократических государствах имеются соответствующие демократические процедуры. Существует возможность замены некомпетентного политика и в странах с тоталитарными режимами, где средства массовой информации контролируются государством. В странах с диктаторскими режимами также имеются соответствующие механизмы (например, "И молча обмененный взор ему был общий приговор" — имеются в виду соратники за спиной диктатора). Тем не менее, попадание ядерного оружия в руки малоразвитых государств с тоталитарными режимами, могущими воевать с высокими значениями фактора Л.Н. Толстого, существенно повышает вероятность использования ядерного оружия в вооруженном конфликте.

2. Технологический прогресс приводит к появлению все более эффективных средств поражения. Для борьбы с этими средствами возникают контр-средства. (Против стрелкового оружия - танки, против танков — ПТУРСы, против ПТУРСов — самолеты и вертолеты, против самолетов и вертолетов — зенитно-ракетные комплексы и т.д.) В результате средства ведения вооруженной борьбы приобретают характер сложной структуры, отдельные элементы которой взаимно обеспечивают друг друга.

Развитие средств поражения всегда опережает развитие контр-средств. В то же время вооруженная борьба является способом разрешения конфликтов только, если средства поражения и контр-средства находятся в таком равновесии, система управления способна удерживать структуру вооруженных сил и их боеспособность в процессе боевых действий. Если равновесие нарушено, то есть контр-средства не могут обеспечить сохранение структуры вооруженных сил и боеспособности войск в процессе боевых действий, что имеет место в случае использования ядерного оружия с обеих сторон, появляется механизм сдерживания, аналогичный механизму ядерного сдерживания.

В некоторой мере, имеет место и обратное: если бы была возможна абсолютная защита людей, участвующих в вооруженной борьбе, от имеющихся средств поражения, причем как с одной, так и с другой стороны, вероятность возникновения вооруженных конфликтов уменьшилась бы. Дело в том, что область возможных компромиссов, более выгодных обоим конфликтующим противникам по сравнению с вооруженным конфликтом, стала бы очень широка. Таким образом, к появлению механизма сдерживания приводит всякий существенный дисбаланс между средствами поражения и средствами защиты от них, т.е. контр-средствами. Заметим, что механизм уменьшения фактора Л.Н. Толстого с увеличением благосостояния государств также ведет к уменьшению

вероятности вооруженных конфликтов между достаточно "развитыми" (см. выше значение этого термина) государствами. Этот же механизм, не уменьшая вероятность вооруженных конфликтов между "развитыми" и "неразвитыми" государствами, трансформирует структуру вооруженных сил "развитых" государств таким образом, что эта структура все более становится способной воевать только в режиме расстрела обезоруженных.

3. Применение ядерного оружия оказывает катастрофическое влияние на мирное население, экономику, экологию не только воюющих государств, но и сопредельных с воюющими, а, если масштаб применения ядерного оружия превышает некоторые критические пределы, то и на все государства мирового сообщества. Этот вывод вытекает из результатов математического моделирования климатических последствий ядерной войны, полученных впервые в СССР школой академика Н.Н. Моисеева и подтвержденных затем многочисленными исследованиями западных ученых. Результаты, о которых идет речь, основаны на гипотезе ряда ученых (К. Саган и др.) о том, что сажа, образовавшаяся в результате пожаров, происходящих от взрывов ядерных боезапасов, сделает на продолжительное время непрозрачными нижние слои атмосферы. При достаточном количестве ядерных взрывов это помутнение атмосферы вследствие процессов конвекции и диффузии примет глобальный характер. Математическая модель общей циркуляции атмосферы позволяет рассчитать климатические последствия помутнения нижних слоев атмосферы в зависимости от количества сажи, оказавшейся в атмосфере. С помощью этих расчетов устанавливается, что широкомасштабная ядерная война уничтожит существующую сейчас структуру производства материальных благ и поставит под вопрос само существование человечества.

Это обстоятельство делает невозможным достижение каких-либо "разумных" целей, например, каких-либо экономических выгод, которых можно достичь путем войны с применением ядерного оружия против государств, которые им тоже обладают, и тем самым существенно суживает область таких межгосударственных конфликтов, при которых применение ядерного оружия оправдано.

4. "Информационный" аспект механизма ядерного сдерживания оказывал сильное стабилизирующее влияние в то время, когда имела место двухполюсная геополитическая структура. Он является проявлением общего механизма стабилизации течения управляемого процесса, возникающего, когда субъекты, могущие влиять на его течение, обладают возможностью адекватного прогноза последствий как своих действий, так и действий других субъектов. Наверное, многих (но не всех!) катастрофических процессов, произошедших в истории, не случилось бы, если бы их инициаторы могли совершенно адекватно прогнозировать их последствия. В эпоху глобального противостояния двух военно-политических блоков каждый из них имел основанные на инструментах математического моделирования и исследования операций средства прогноза развития конфликта с применением ядерного оружия и его экономических и экологических последствий. Каждый блок практически точно знал, что и как будет делать противостоящая сторона, если данный блок первым начнет войну с применением ядерного оружия: каждый блок имел математические модели и соответствующие программные комплексы, которые рассчитывали оптимальные стратегии поведения в случае возникновения ядерной войны и последствия обмена ядерными ударами. Каждый блок при этом вполне

осознанно стремился к такой ситуации, когда любой из них, начавший ядерную войну первым, получит ответный удар, приносящий ему (начавшему первым) неприемлемый ущерб. Эти обстоятельства были одной из причин того, что ни один из блоков не мог позволить себе совершать действия, обостряющие отношения до такой степени, когда становилась возможной широкомасштабная война, имеющая шансы перейти в ядерную. В настоящее время действие обсуждаемого механизма хотя и ослаблено, однако, несомненно, имеет место.

Эволюция механизма ядерного сдерживания при распространении ядерного оружия.

Итак, ядерное оружие на самом деле не является оружием, потому что воевать с применением этого оружия нельзя. Зачем же оно в таком случае нужно?

Дело, конечно, в самом факте обладания ядерным оружием, которым определяется статус государства в современном мире, его значение, отношение к нему со стороны других государств, степень уважения его интересов, а, значит, и потенциал экономического развития. Этот очевидный факт говорит о том, что система международных отношений, где уважают в первую очередь силу, в большой мере лишена того, что в бытовых отношениях между людьми именуется моральными и нравственными нормами. Речь здесь идет не о нормах международного права и не о том, что говорят государственные деятели, когда они встречаются друг с другом, а о том, какими соображениями *на самом деле* они руководствуются при решении вопросов, связанных с обеспечением национальной безопасности, строительством вооруженных сил и развитием военно-промышленного комплекса.

Далее термины “система межгосударственных отношений” и “межгосударственные отношения” будет употребляться для обозначения именно этой стороны международных отношений. Более подробно, этот термин будет означать совокупность представлений правящих структур государств о характере возможных угроз данному государству, о том, какие военно-политические ситуации возможны, т.е. представлений о возможных действиях других государств, которые являются определяющими при обеспечении национальной безопасности, территориальной целостности, развитии вооруженных сил и развитии военно-промышленного комплекса данного государства.

Утрируя, чтобы подчеркнуть существо дела, можно сказать, что система межгосударственных отношений в современном мировом сообществе, в том понимании этого термина, которое было охарактеризовано выше, в некоторых проявлениях более близка к отношениям в стае зверей (волков или обезьян?), где верховодят физически сильные особи и где отношение к особи определяется тем, как страшно она может оскалиться, чем к бытовым отношениям между людьми в нормальном человеческом обществе. Для того чтобы в современном мире с интересами государства считались, нужны острые клыки и крепкие мускулы, т.е. танки, пушки, самолеты, ракеты и т.д., а лучше всего оскалится на соседей с помощью ядерной бомбы. Моральные и нравственные нормы, превращающиеся постепенно в правовые, в отношениях между людьми в человеческом обществе — это внутренние механизмы самоограничения людей, которые в то же время являются механизмами самосохранения, гомеостаза человеческого общества, обеспечивающие ему потенциал для дальнейшего развития.

Процесс формирования норм морали и нравственности в межгосударственных отношениях и превращения их в нормы международного права находится в сейчас самом зачаточном состоянии. Этот процесс отстает от процесса “завязывания” интересов государств во все более тугой узел, вызванного углублением межгосударственного разделения труда. В результате усиливается несогласованность между структурой производства материальных благ в мировом сообществе и его организационной структурой. Нынешний характер межгосударственных отношений делает все более нерациональной существующую степень взаимной информированности государств о вооруженных силах друг друга и, что наиболее существенно, о целях и намерениях друг друга. Как бы ни понимать интересы любых двух наперед заданных государств мирового сообщества, они не являются противоположными и с углублением межгосударственного разделения труда становятся все менее противоположными.

Один из выводов общего характера, который следует из результатов изучения теоретико-игровых моделей, состоит в том, что, чем менее противоположны интересы субъектов, могущих влиять на течение некоторого процесса и достигать тем самым целей (при условии, что эти цели являются “разумными”), тем более выгодно субъектам иметь достоверную информацию о целях и действиях всех остальных субъектов. Результаты выполнения имитационных игр на соответствующих математических моделях говорят о том, что в описанной ситуации неадекватная оценка некоторым субъектом тех целей, которые достигают другие субъекты, дестабилизирует течение процесса. Если же такая неадекватная оценка имеется у всех субъектов, которые влияют на течение процесса, то это практически неизбежно ведет к катастрофическим последствиям, т.е. к ситуации, когда никакой из субъектов не достигает своих (“разумных, мирных”) целей, хотя такая возможность, в принципе, имеется. Указанные несоответствия с течением времени будут только усугубляться.

Жизнь всего нескольких поколений отделяет нас от момента, когда начнут исчерпываться планетарные ресурсы (нефть, газ,..., кислород). При существующей системе межгосударственных отношений в такой ситуации с интересами государств, не обладающими ядерным оружием, никто не будет считаться. Поэтому распространение ядерного оружия неизбежно. Хорошо известно, что количество государств, фактически обладающих ядерным оружием, гораздо больше, чем количество государств, официально входящих в клуб ядерных держав. Значительная часть государств, которые присоединились к конвенции по нераспространению ядерного оружия, ведет исследования в области создания ядерного оружия, и многие из этих государств уже способны производить это оружие. (Совершенно очевидно, например, что никакие бомбардировки не могут остановить процесс создания ядерного оружия в Ираке, наоборот, бомбардировки значительно ускоряют этот процесс.) Несомненно, что, когда количество ядерных государств достигнет некоторого критического предела, дальнейшее распространение ядерного оружия примет характер взрывного процесса.

Распространение ядерного оружия будет приводить к тому, что государства, которые его получили, будут попадать под действие механизма ядерного сдерживания. Несмотря на это, вероятность использования ядерного оружия с его распространением будет повышаться. Особенно опасно, как это уже отмечалось выше, попадание ядерного оружия в руки слабо развитых государств

с тоталитарными режимами, где средств массовой информации контролируются государственными структурами. В таких государствах может не действовать ни один из обсуждавшихся выше аспектов механизма ядерного сдерживания. В самом деле, что значит, например, “разумная цель” для политика-диктатора, контролирующего средства массовой информации и не испытывающего влияния общественного мнения на свои решения?

Далее, для того чтобы донести до политиков, какие последствия повлечет за собой использование ядерного оружия, необходимо располагать инструментами, позволяющими дать такой прогноз, в том числе инструментами, основанными на математических средствах. Для этого необходимо, чтобы политики достаточно ясно осознавали то, что они сами хотят, к каким целям они стремятся, чтобы они адекватно оценивали те цели, к которым стремятся политики в остальных государствах, для этого, в свою очередь, необходимо, чтобы в государстве существовали аналитические структуры, владеющие инструментами анализа и прогноза, чтобы эти структуры были встроены в систему принятия государственных решений, чтобы политики обладали достаточным уровнем образованности и культуры, позволяющим понять такие прогнозы. Последнее условие является проблемой и для “развитых” стран: образованность и культура правителей в странах с демократическим устройством не может сильно в ту или иную сторону отличаться от образованности и культуры народа (в странах с тоталитарными режимами — может).

Проведенный анализ не позволяет сделать какие-либо оптимистические прогнозы, как бы автору этого не хотелось. Мировое сообщество с существующей ныне системой межгосударственных отношений, движется к кризису, который станет очевидным, когда ядерное оружие получит достаточное распространение. Суть кризиса состоит в отставании развития образования и культуры, а также нравственного развития человечества, от его технологического развития. Эту суть в утрированной форме можно выразить так: когда необразованные правители, не понимающие ни того, что они хотят сами, ни того, что происходит в мире, начнут кидать друг в друга ядерные бомбы, то одной из исходных причин этого явления будет, например, тот факт, что ни гражданам США ни гражданам России не стыдно сейчас за своих политиков (несколько человек и там и тут, которым стыдно, не в счет, потому, что не они определяют общественное мнение), таскающих за собой ядерные чемодачики. Правители с их ядерными чемоданчиками не воспринимаются гражданами как вождей племен дикарей, раскрашивающих себя для того, чтобы соплеменники ясно видели, у кого власть, а также для устрашения соседей, наоборот, они гордятся ими — это пища для их национального тщеславия.

Литература

1. Понтрягин Л.С. и др. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука. 1976. 392 с.
2. Моисеев Н.Н. Элементы теории оптимальных систем. М.: Наука. 1975. 527 с.
3. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. М.: Наука. 1981. 489 с.
4. Гермейер Ю.Б. Игры с противоположными интересами. М.: Наука. 1976. 328 с.
5. Венцель Е.С. Исследование операций. М.: Советское радио. 1972. 552 с.
6. Горелик В.А., Ушаков И.А. Исследование операций. М.: Машиностроение. 1986. 288 с.

7. Толстой Л.Н. Война и мир. М.:Художественная литература, 1987. - Кн.2. С. 427-428.
8. Иванилов В.Ю., Огарышев В.Ф., Павловский Ю.Н. Имитация конфликтов. М.: ВЦ РАН. 1993. 196 с.
9. Павловский Ю.Н. О факторе Л.Н.Толстого в вооруженной борьбе. Математическое моделирование. Т.5, N 1, 1993. С.3-15.
10. Павловский Ю.Н. Имитационные модели и системы. М.: Знание. 1990. 46 с.
11. Павловский Ю.Н. Метод имитационных игр в проблемах геополитики, безопасности, межгосударственных отношений. Материалы учредительной конференции Российского научного общества исследования операций. М.: ВЦ РАН. 1997. С.44-56.
12. Павловский Ю.Н. О сохранении структуры вооруженных сил в вооруженной борьбе// Дискретный анализ и исследование операций. 1998. Серия 2. Том 5, N 1, с. 40-55.
13. Моисеев Н.Н., Александров В.В., Тарко А.М. Человек и биосфера. Опыт системного анализа и экспериментов с моделями. М.: Наука, 1985, 272 с.
14. Павловский Ю.Н., Смирнова Т.Г. Проблема декомпозиции в математическом моделировании. М.: Фазис. 1998. 266 с.
15. Горелик В.А., Горелов М.А., Кононенко А.Ф. Анализ конфликтных ситуаций в системах управления. М.:Радио и связь.1991.288 с.
16. Павловский Ю.Н. Механизм ядерного сдерживания — математический и гуманитарный анализ. Вестник РАН, т. 70, 3, 2000, с. 1195-202.