Конспекты лекций по прикладному математическому моделированию

Часть 1

Первая часть конспектов лекций (конспекты 1 — 4) является элементарным введением в проблематику математического моделирования. Для освоения материала этой части достаточно школьного курса математики. По нашему мнению, эта часть может использоваться также для курса математического моделирования в гуманитарных ВУЗах. Для освоения материала второй части (конспекты 5 — 9) необходимы начальные сведения из теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако, лекции второй части также могут быть прочитаны без использования элементов высшей математики.

Две главные идеи лежат в основе настоящего курса. Первая состоит в том, что математическое моделирование является наукоемкой технологией, встроенной в исследовательские процессы, в процессы производства и потребления материальных благ так, что ни современная производственная структура ни структура потребления не могут существовать без этой технологии. Вторая состоит в том, что математические и гуманитарные средства анализа и прогноза реальных явлений, процессов, систем является двумя сторонами одной медали.

Лекция 1. Примеры простейших математических моделей. Простейшая демографическая модель. Концептуальные понятия, связанные с математическим моделированием.

1. Слово "модель" будет означать нечто, способное дать прогноз каких-либо свойств некоторого явления, процесса, системы. Словосочетание "математическая модель" будет обозначать совокупность уравнений (более общо — совокупность соотношений) в которых участвуют характеристиками некоторого явления (процесса, системы). Математические модели предназначаются для того, чтобы узнать что-то, что нам интересно (желательно, необходимо) знать. Не все, что нам интересно (желательно, необходимо) узнать, можно узнать средствами математического моделирования.

С этой очевидной истиной связаны следующие вопросы: какое место среди различных методов прогноза свойств реальных явлений (процессов, систем) занимает сейчас математическое моделирование, каковы перспективы средств математического моделирования, каким образом оно связано с различными сторонами жизни людей, когда сейчас рационально обращаться к средствам математического моделирования для выяснения того, чего мы не знаем, но что хотели бы узнать. Одна из целей данного курса лекций состоит в том, чтобы ответить на эти вопросы.

Начнем обсуждение проблем, связанных с математическим моделированием, с простейшего примера математической модели. Именно, изучим ситуацию, описанную в условиях задачи, которую все мы когда-то решали.

У Кати и Пети вместе было 6 яблок, причем у Кати было на 2 яблока больше, чем у Пети. Сколько яблок было у Кати и сколько у Пети?

Для изучения описанной в условиях этой задачи ситуации естественно обратиться к средствам математического моделирования. Обозначим через x — количество яблок у Кати, через y — количество яблок у Пети. Математической моделью ситуации, описанной в условиях задачи, являются следующие два уравнения: $x+y=6$, $x-y=2$. В уравнениях этой математической модели фигурирует четыре характеристики: $x, y, 6, 2$. Значения характеристик x, y нам неизвестны. Именно эти значения мы хотели бы узнать, обращаясь к средствам математического моделирования. Такие характеристики принято называть "**прогностическими**" или "**внутренними**" или "**эндогенными**" характеристиками математической модели. В моделям физических процессов такие характеристики называют также "фазовыми переменными". Числа 6 и 2 относятся к характеристикам, которые принято называть "**внешними**" или "**экзогенными**" или "**параметрами**". Значения внешних характеристик известны (или считается, что они известны).

Уравнения $x+y=6$, $x-y=2$ составленной нами математической модели определяют ее внутренние величины единственным образом. В самом деле, напишем два уравнения рассматриваемой математической модели друг под другом

$$x+y=6$$

$$x-y=2$$

и сложим почленно

$$x+y+x-y=6+2.$$

Получим в результате $2x=8$ или $x=4$. Таким образом из двух уравнений рассматриваемой математической модели изучаемой ситуации с неизбежностью вытекает существование единственного значения характеристики x, которое может удовлетворять этим двум уравнениям. Подставим это значение, например, в первое уравнение. Получим соотношение $4+y=6$. Из этого соотношения следует, что существует единственное значение характеристики y, равное 2, которое вместе со значением 4 характеристики x удовлетворяет обоим уравнениям рассматриваемой математической модели.

Математические модели, уравнения (соотношения)которой определяют единственным образом значения ее внутренних величин при известных значениях ее внешних величин будут называться "**замкнутыми**". (Терминология в области математического моделирования не является вполне устоявшейся. В ряде источников словосочетанию "замкнутая математическая модель" придается другой смысл.) Мы установили таким образом, что рассматриваемая нами модель замкнута.

2. Второй моделью, иллюстрирующей введенные выше понятия о внешних и внутренних характеристиках математической модели и понятие о замкнутой модели, будет простейшая модель, которая описывает изменение численности населения в некоторой стране. Пусть x_i — численность людей в стране в году i, $i=t, t+1, ..., T$. Вводится предположение, что относительное изменение численности людей в стране в течение год, т.е. величина $(x_{i+1}-x_i)/x_i$ не зависит от i.

Это очень сильное предположение, корректное только если социальная, экономическая, экологическая ситуация в стране стабильна. Более подробно корректность этого предположения будет обсуждаться позже. Здесь же обратим внимание на некоторые обстоятельства. Поскольку числа x_i являются по определению целыми, то точное выполнение сделанного предположения практически исключено. Другими словами, если бы мы совершенно точно, т.е. с точностью до одного человека знали числа x_i и подсчитали бы для каждого i величины $(x_{i+1}-x_i)/x_i$, то они, конечно, оказались бы не равными друг другу. Однако, возникает вопрос: что такое значение x_i, измеренное с точностью до одного человека? По определению эта величина характеризует численность населения в стране в году i. Но в течение года люди рождаются и умирают и число $(x_{i+1}-x_i)$ как раз и есть разность между количеством родившихся и умерших в году i. Итак, мы ввели характеристики x_i изучаемого процесса, но на самом деле мы не знаем что это такое и поэтому не знаем как их измерить. Одним из решений обсуждаемой проблемы является следующий: выберем в году некоторый день, например 30 сентября и будем считать по определению численность населения 30 сентября года i характеристикой численности населения в году i. Ту же самую проблему — что такое численность населения в данный конкретный день данного года, решим следующим образом: откажемся измерять численность населения с точностью до одного человека и будем считать допустимой погрешность при измерении этой численности равной характерному изменению численности населения в течении дня. (Характерное изменение численности населения в течение одного дня на Земном шаре является величиной порядка нескольких сотен тысяч человек, в России — порядка тысячи человек: в 2000 году население России составляло 145000000 человек, в 2000 году в России умерло 140000, родилось 800000 человек.)

Предположение о независимости величины $(x_{i+1}-x_i)/x_i$, от i записанное как совокупность уравнений $(x_{i+1}-x_i)/x_i=\alpha,\ i=t,t+1,...,T-1$, где α — общее значение всех относительных изменений численности в течение года является математической моделью рассматриваемого процесса. Выполним эквивалентное преобразование составленной модели. Для этого каждое уравнение $(x_{i+1}-x_i)/x_i=\alpha,\ i=t,t+1,...,T-1$ умножим на x_i. В результате получим $x_{i+1}-x_i=\alpha x_i,\ i=t,t+1,...,T-1$ или

$$x_{i+1}=(1+\alpha)x_i,\ i=t,t+1,...,T-1 \tag{1}$$

В составленной модели участвуют $T-t+1$ характеристик x_i, $i=t,t+1,...,T$ и характеристика α. Таким образом, общее количество характеристик, участвующих в модели — $T-t+2$. Уравнений же в этой модели $T-t$. Поэтому для того, чтобы определить все интересующие нас значения характеристик x_i, $i=t,t+1,...,T$ необходимо узнать каким-то образом две из $T-t+2$ участвующих в модели характеристик. Наиболее естественно пытаться узнать значения "начальной" численности x_t населения в стране и значение относительного изменения α этой численности в течение года. Если эти значения известны, то можно вычислить и значение x_{t+1} из первого уравнения составленной модели: $x_{t+1}=(1+\alpha)x_t$. Из второго уравнения составленной модели теперь можно вычислить x_{t+2}: $x_{t+2}=(1+\alpha)^2x_t$. Ясно теперь, что формула $x_i=(1+\alpha)^{i-t}x_t$ позволяет вычислить значения численности населения в стране в любом году i из интересующего нас промежутка времени. Используя представление о внешних и внутренних величинах модели и о замкнутых моделях, результат проведенного анализа можно выразить следующим образом: составленная нами модель замкнута, если характеристики α и x_t рассматриваются как внешние, а характеристики $x_i, i = t+1, ..., T$ рассматриваются как внутренние.

Этот пример демонстрирует то, что деление характеристик, участвующих в модели, на внутренние и внешние может быть выполнено, вообще говоря, не единственным способом. Например, в качестве внешних характеристик в рассмотренной модели можно было бы взять вместо α и x_t характеристики x_t и x_{t+1}. Действительно, если значения этих двух характеристик известны, то значения всех остальных участвующих в модели характеристик, в том числе и значение α вычисляются из уравнений модели.

На примере рассматриваемой модели проанализируем некоторые обстоятельства, которые связаны с разбиением участвующих в модели характеристик на внешние и внутренние. Для получения прогноза с помощью замкнутой математической модели, т.е. для вычисления из ее уравнений значений внутренних характеристик, значения внешних характеристики необходимо измерять (вычислять, определять каким-либо образом). Ясно, что замкнутая математическая модель как инструмент прогноза имеет практический смысл, только если ее внутренние величины не влияют на внешние. Если это так, то значения внешних характеристик можно измерить (вычислить, определить каким-либо образом) не зная внутренних характеристик. Это измерение нужно сделать один раз и затем получать прогнозы с помощью модели всякий раз, когда это нужно. Процесс определения значений внешних характеристик математической модели называется **идентификацией** модели. В первом из рассмотренных нами примеров в силу его искусственного характера проблема идентификации "не была видна". В рассматриваемом примере эта проблема является главной при получении прогноза изменения численности населения. В самом деле, если внешними характеристиками в этой модели считаются α и x_t, то для идентификации модели необходимо провести перепись населения в году t. Перепись населения даст значение x_t. Поскольку факты рождения и смерти людей документально фиксируются, то разность между количеством родившихся и количеством умерших людей в году t можно установить по имеющейся документации и разделив эту разность на измеренную численность населения x_t оценить значение α. Оценить значение α можно и непосредственно по информации, полученной во время переписи, включив соответствующие вопросы в опросные листы.

Перепись населения требует больших расходов. Например, в России перепись населения, намеченная на 2000 год перенесена на 2002 из-за отсутствия бюджетных средств. Если подсчитать все расходы, которые необходимы для того, чтобы практически получить прогноз изменения численности населения по составленной нами модели, то это — расходы на перепись населения, т.е.на идентификацию модели, поскольку все остальные расходы по сравнению с ними пренебрежимо малы. Если считать внешними характеристиками рассматриваемой модели x_t и x_{t+1}, то для идентификации такой модели требуется выполнить две переписи населения в двух последовательных годах. Расходы на идентификацию модели будут практически в два раза больше. Ясно поэтому, что все другие варианты выбора внешних величин, кроме x_t и α в рассматриваемой модели либо практически нерациональны, либо просто бессмысленны.

Как будет видно из дальнейших примеров математических моделей, ситуация с разбиением характеристик модели на внешние и внутренние и ситуация с идентификацией модели в рассмотренном примере является типичной. Внутренние характеристики модели, т.е. те, которые мы хотели бы узнать, обращаясь к средствам математического моделирования, при некоторых условиях, в пределах некоторой приемлемой с практической точки зрения точности не должны влиять на внешние характеристики этой модели. Это обстоятельство в большой мере предопределяет разбиение характеристик модели на внешние и внутренние. Можно сказать, что в основе всякой математической модели, способной давать прогноз, лежит гипотеза о такой независимости. Эту гипотезу мы далее будем называть гипотезой об инвариантности, лежащей в основе модели. Во многих случаях математическая модель и есть просто запись этой гипотезы, как это имеет место для рассмотренной модели изменения численности населения. Если же все-таки имеется некоторая "свобода" в выборе разбиения характеристик модели на внешние и внутренние, то это свобода в очень многих случаях кажущаяся, поскольку практически всегда расходы на идентификацию математической модели (как будет ясно из дальнейших примеров) по крайней мере на порядок превышают все остальные расходы, связанные с практическим получением прогнозов по данной модели и выбор внешних величин модели тогда практически однозначно определяется имеющейся измерительной техникой и условием минимизации расходов на идентификацию модели.

Вернемся к составленной выше модели изменения численности населения. При ее составлении уже было сказано, что лежащая в ее основе гипотеза об инвариантности является очень сильной, верной только если социально-экономическая и экологическая ситуации в стране стабильны. На самом деле для большинства стран (например, для России) величины $(x_{i+1} - x_i)/x_i$ достаточно существенно зависят от номера года i, т.е. $(x_{i+1} - x_i)/x_i = \alpha_i$. Для того, чтобы получить прогноз изменения численности населения по этой, более точной модели необходимо знать все значения α_i. Казалось бы эта более точная модель лишена какой-либо практической ценности. Это, однако не так. Дело в том, что в достаточно широких пределах значения α_i не зависят от x_i. Другими словами зависимость величин α_i от номера года i связана не с x_i, а изменением социально-экономических, политических, экологических факторов. В той мере, в которой значения α_i не зависят от x_i, указанные факторы являются внешними по отношению к рассматриваемой модели. Изучение зависимости α_i от этих факторов является частью демографии.

Вычисление внутренних характеристик замкнутой математической после выполнения процесса ее идентификации не исчерпывает пользу, которую можно получить, располагаю моделью. Поскольку модель является совокупностью формальных соотношений, то из этих соотношений можно извлекать следствия чисто математическими средствами, т.е. средствами формально-логического вывода. Приведем пример такого извлечения. Будем считать, что величина α в простейшей модели $(x_{i+1} - x_i)/x_i = \alpha,\ i = t, t+1, ..., T-1$ демографического процесса не зависит от номера года i и эта величина больше нуля. Рассмотрим формулу $x_i = (1+\alpha)^{i-t}x_t$, позволяющую вычислять значения численности населения в стране в любом году i из интересующего нас промежутка времени. Пусть в некотором году i^* численность населения x_{i^*} в рассматриваемой стране оказалась равной удвоенной численности x_i населения в этой стране в году i. Вычислим разность $i^* - i$. Имеем

$$x_i = (1+\alpha)^{i-t}x_t$$

$$2x_i = (1+\alpha)^{i^*-t}x_t$$

Разделив почленно второе уравнение на первое получим

$$2 = (1+\alpha)^{i^*-i}$$

или

$$i^* - i = \frac{\ln 2}{\ln(1+\alpha)} \qquad (2).$$

Поскольку α величина порядка 0.01, то $\ln(1+\alpha) \simeq \alpha$. Поэтому формулу 2) можно записать в виде

$$i^* - i = \frac{\ln 2}{\alpha} \qquad (3).$$

Обратим внимание на то, что номер года i в проведенных рассуждениях является произвольным (в пределах от t до T), правая же часть формулы 2) не зависит от i. Это означает, что соотношение 2) можно сформулировать следующим образом: численность населения (при $\alpha > 0$) удваивается каждые $\frac{\ln 2}{\ln(1+\alpha)}$ лет. В октябре 1999 года численность населения Земли достигла 6 миллиардов человек. Величина α для населения всего Земного шара оценивается демографами как 0,0144. Поэтому население Земли удваивается каждые $\ln 2/0,0144 = 50$ лет . На рис 1. изображена численности населения на Земле по годам в течении текущего столетия. Ожидаемая численность населения Земного шара будет составлять 12 миллиардов в районе 2050 года, 24 миллиарда — в районе 2100 года в предположении, что коэффициент α не изменится. По некоторым оценкам (например, модель мировой динамики Форрестера) население 8 миллиардов является критическим значением для Земли: при современных технологиях в общественном производстве Земля может "выдержать" не более 8 миллиардов людей. Дальнейшее увеличение населения вызовет уменьшение среднего уровня жизни из-за исчерпания планетарных природных ресурсов и деградации окружающей среды. Значение 8 миллиардов будет достигнуто в районе 2030 года. Поэтому при сохранении нынешних темпов роста населения Земли и при условии, что структура производства и потребления не изменятся существенным образом, в районе 2030 года следует ожидать кризисных явлений в жизни мирового сообщества. Эти кризисные явления неизбежно примут системный характер, т.е. у них будут экономические, экологические, социальные, политические аспекты. В самом деле, о недостатке продовольствия, исчепании сырьевых ресурсов, загрязнении уже шла речь выше. К этому нужно добавить, что к 2030 году очень многие государства будут обладать ядерным оружием (см. лекцию 8). В связи с этим вероятность катастрофических явлений (например, войн с применением ядерного оружия) на Земле увеличится очень сильно по сравнению с нынешним положением дел.

Все это должны иметь в виду политики, а аналитические структуры при политиках должны не только иметь в виду указанные обстоятельства, но уже сейчас (позже — будет поздно) разрабатывать возможные сценарии развития кризисных ситуаций, связанных с демографическими процессами, используя при этом и средства математического моделирования, и на основе выполненного анализа предлагать политикам комплекс мер, которые могли бы ликвидировать или смягчить кризисные явления (т.е. обеспечить, как сейчас принять выражаться, "устойчивое развитие мирового сообщества"). Системный анализ кризиса, связанного с демографическим процессом, — сложная проблема, требующая как от обслуживающих политиков аналитических структур так и от самих политиков, культуры и образованности, владения всеми современными инструментами системного анализа, в том числе инструментами анализа и прогноза реальных процессов, основанными на математическом моделировании. Что касается математического моделирования, то, если политики и соответствующие аналитические структуры не обладают необходимым уровнем образования и культуры, то они не могут использовать этот инструмент. Более того, они и не должны его использовать. **Потому что неправильное использование любого инструмента в любой сфере деятельности приносит не пользу, в вред, тем большую, чем мощнее инструмент.** В следующих лекциях эта фраза будет повторяться еще не раз, поскольку неумение пользоваться средствами математического моделирования — основное препятствия на пути их внедрения в практическую деятельность специалистов гуманитарных специальностей.

3. В выполненном выше анализе использовались лишь средства элементарной математики. Поэтому этот анализ должен быть доступен всем лицам, имеющим диплом об окончании средней школы, в том числе, специалистам-гуманитариям. В рассуждениях, проводимых ниже будут использоваться средства высшей математики.

Представим простейшую модель изменения численности населения в регионе в более общей форме. Для этого придется изменить некоторые обозначения. Начальный момент времени, в который численность населения должна быть измерена обозначим через t_0. Через Δt обозначим некоторый временной промежуток. Введем также обозначения $t_i = t_0 + i\Delta t$. Будем считать, что нам желательно знать значения численности населения в моменты времени t_i при $i = 1, 2, ..., n$. Обозначим $x_i = x(t_0 + i\Delta t) = x(t_i)$. Гипотеза, лежащая в основе конструируемой модели будет теперь такова: изменение численности населения в единицу времени в расчете на одного человека не зависит от t_i. Соотношения модели будут иметь вид $(x_{i+1} - x_i)/\Delta t x_i = \alpha, i = 0, 1, 2, ..., n-1$. Перепишем модель в следующей форме

$$\frac{x(t_i + \Delta t) - x(t_i)}{\Delta t \cdot x(t_i)} = \alpha,\ i = 0, 1, 2, ..., n-1, \tag{4}$$

Будем характеризовать численность населения функцией $x(t)$ действительного аргумента t, который меняется в интервале $(t_0, t_0 + n\Delta t)$. Вид 4) модели позволяет постулировать следующую модель

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x, \tag{5}$$

К этой модели следует добавить начальное условие для функции $x(t)$:

$$x(t_0 = x_0) \qquad (6).$$

Модель 4) является дифференциальным уравнением первого порядка. Его общим решением является функция

$$x = Ce^{\alpha t} \qquad (7),$$

где C - постоянная. Словосочетание "общее решение" означает, что формула (7) содержит все решения уравнения (6), когда постоянная C принимает всевозможные значения из множества $\mathbb{R}$ действительных чисел. Решение уравнения (5), удовлетворяющее начальным условиям (6), имеет вид

$$x(t) = x_0 e^{\alpha(t-t_0)} \qquad (8),$$

Как и для модели 3) вычислим момент времени t^*, когда численность населения станет в два раза больше, чем в момент t.

$$x(t) = x_0 e^{\alpha(t-t_0)} \qquad (9),$$

$$x(t^*) = 2x(t) = x_0 e^{\alpha(t^*-t_0)} \qquad (10).$$

Разделив почленно (10) на (9) получим

$$2 = e^{\alpha(t^*-t)}$$

или

$$i^* - i = \frac{\ln 2}{\alpha} \qquad (11),$$

т.е. в точности формулу (3).

В настоящее время высказываются предположения (Капица С.П. Общая теория роста численности человнечества. М.:Наука. 1999. 192 с.) что численность людей на Земле изменяется не по закону 5), а по закону

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x^2}{k^2}, \qquad (12)$$

где k — постоянная. Идентификация этой модели дает $k = 64000$ и решение 12) дается формулой

$$x = \frac{186}{2025 - t} 10^9.$$

Таким образом в соответствии с моделью С.П. Капицы, если закон 12) изменения численности населения Земли не изменится, то в 2025 году численность населения на Земле станет бесконечной (см. рис 2).

Итак, обе модели роста численности населения, которые здесь рассмотрены предсказывают демографический кризис на Земле приблизительно в одно и то же время.

Литература

1. Форрестер Дж. Мировая динамика. М.: Наука. 1978. 167 с.

2. Павловский Ю.Н. Имитационные модели и системы. М.: Фазис. 2000. 131 с.

3. Староверов О.В. Азы математической демографии. М.: Наука. 1997. 159 с.

4.Капица С.П. Общая теория роста человечества. М.: Наука. 1999. 190 с.

Лекция 2. Примеры математических моделей. Модель возрастной структуры населения.

1. Очевидно практическое значение прогноза численности населения в стране. Такой прогноз нужен многим государственным и частным структурам. Однако, все такие структуры интересует не только общая численность населения, но и распределение населения по возрасту и полу. Государственным структурам, например, прогноз распределения населения по возрасту и полу нужен для планирования количества дошкольных государственных учреждений, государственных школ, государственных высших учебных заведений, количества учебных пособий и т.д. Прогноз распределения населения по возрасту и полу необходим всем структурам, связанным с производством товаров народного потребления.

Составим математическую модель, с помощью которой можно дать такой прогноз, если будет возможность оценить внешние величины этой модели. Характеристики, значения которых мы хотим узнать — это количества $x_{m,i,a}, x_{f,i,a}$, соответственно, мужчин и женщин, которым в году i исполняется a лет. Здесь $i = t, t+1, ..., T$, а $a = 1, 2, ..., 100$. Любому человеку, которому в году в году i исполнилось a лет и который доживет до свего следующего дня рождения, в следующем $i+1$ - году исполнится $a+1$ лет. Поэтому, если бы люди не умирали, то имели бы место равенства $x_{m,i+1,a+1} = x_{m,i,a}$, $x_{f,i+1,a+1} = x_{f,i,a},$. В реальности, однако, только часть людей доживает до своего следующего дня рождения. Обозначим через $\beta_{m,i,a}$ долю мужчин, среди тех, которым в году i исполнилось a лет, которые не дожили до своего следующего дня рождения. По определению имеем $\beta_{m,i,a} = (x_{m,i,a} - x_{m,i+1,a+1}/x_{m,i,a}, ,)$. Предположим, что величина $\beta_{m,i,a}$, которую в демографии принято называть силой смертности, уже не зависит от количеств $x_{m,i,a}, x_{(f,i,a)}$, однако, эта величина, конечно, существенно зависит от возраста a. Зависимость этой величины от номера года i определяется политическими, социальными, экологическими факторами. Обозначим через $\beta(f,i,a)$ аналогичную величину для женщин. Тогда $\beta_{f,i,a} = (x_{f,i,a} - x_{f,i+1,a+1}/x_{f,i,a}, ,)$. Перепишем эти соотношения в более удобном виде

$$x_{m,i+1,a+1} = x_{m,i,a}(1 - \beta_{m,i,a}),\ i = t, t+1, ...T; a = 1, 2, ..., 100 \tag{1}$$

$$x_{f,i+1,a+1} = x_{f,i,a}(1 - \beta_{f,i,a}),\ i = t, t+1, ...T; a = 1, 2, ..., 100 \tag{2}$$

В этих уравнениях не учитывается миграция населения. Обозначим через $y_{m,i,a}, y_{f,i,a}$ разность между количеством въехавших в страну (на постоянное место жительства) и выехавших из страны, соответственно, мужчин и женщин, которым в году i исполняется a лет. Соотношения (1), (2) примут вид

$$x_{m,i+1,a+1} = x_{m,i,a}(1 - \beta_{m,i,a}) + y_{m,i+1,a+1},\ i = t, t+1, ...T; a = 1, 2, ..., 100 \tag{3}$$

$$x_{f,i+1,a+1} = x_{f,i,a}(1 - \beta_{f,i,a}) + y_{f,i+1,a+1},\ i = t, t+1, ...T; a = 1, 2, ..., 100 \tag{4}$$

Обозначим через $\gamma_{m,i,a}$ количество мальчиков родившихся в году i от женщин, имеющих в этом году возраст a, причем в число $\gamma_{m,i,a}$ входят только те мальчики, которые дожили до года. Обозначим через $\gamma_{f,i,a}$ аналогичную величину для девочек. Естественно предположить что значения характеристик $\gamma_{m,i,a}$ и $\gamma_{f,i,a}$, называемые коэффициентами рождаемости, при $a < 15$ и $a > 50$ настолько малы, что их можно считать равными нулю. Введенные характеристики позволяют написать соотношения

$$x_{m,i+1,1} = \sum_{a=15}^{a=50} x_{f,i,a}\gamma_{m,i,a},\ i = t, t+1, ...T \tag{5}$$

$$x_{f,i+1,1} = \sum_{a=15}^{a=50} x_{f,i,a}\gamma_{f,i,a},\ i = t, t+1, ...T \tag{6}$$

2. Для того, чтобы дать прогноз эволюции распределения населения по возрасту и полу, необходимо знать это распределение в начальном году t, т.е. необходимо знать значения характеристик $x_{m,t,a}, x_{f,t,a}, a = 1, 2, ..., 100$. Кроме того, необходимо знать коэффициенты смертности $\beta_{m,i,a}, \beta_{f,i,a}$, $i = t, t+1, ..., T$, $a = 1, 2, ..., 100$ и рождаемости $\gamma_{m,i,a}, \gamma_{f,i,a}$, $i = t, t+1, ..., T$, $a = 15, 2, ..., 50$, а также величины $y_{m,i,a}, y_{f,i,a}, i = t, t+1, ..., T$, $a = 1, 2, ..., 100$, характеризующие миграцию населения. В самом деле, по формулам (3) и (4), написанным для $i = t$ вычисляются фигурирующие в левых частях этих формул величины $x_{m,t+1,1}$ и $x_{f,t+1,1}$, поскольку все величины в правых частях этих формул известны. Затем по формулам (1) и (2), написанным для $i = t$ вычисляются фигурирующие в левых частях этих формул величины $x_{m,t+1,a}$ и $x_{f,t+1,a}, a = 1, 2, ..., 100$, поскольку все величины в правых частях этих формул известны. Аналогичным образом вычисляются величины $x_{m,t+2,1}$ и $x_{f,t+2,1}$, а затем величины $x_{m,t+2,a}$ и $x_{f,t+2,a}, a = 1, 2, ..., 100$.

Таким образом, составленная модель замкнута, если считать в ней внутренними характеристиками $x_{m,i,a}, x_{f,i,a}$, $i = t+1, ..., T$, а $a = 1, 2, ..., 100$, а внешними характеристиками $x_{m,t,a}, x_{f,t,a}$, $a = 1, 2, ..., 100$ и $\beta_{m,i,a}, \beta_{f,i,a}, y_{m,i,a}, y_{f,i,a}$, $i = t, t+1, ..., T$, $a = 1, 2, ..., 100$, $\gamma_{m,i,a}, \gamma_{f,i,a}$, $i = t, t+1, ..., T$, $a = 15, 2, ..., 50$,. Идентификация этой модели составляет трудную проблему. Перепись населения не решает полностью эту проблему, поскольку коэффициенты рождаемости и смертности зависят не только от возраста людей, но и от номера года i и эта зависимость, как уже говорилось, определяется социально-экономическими, политическими и экологическими факторами. Кроме того необходимо прогнозировать миграцию населения. Все эти проблемы составляют часть проблем демографии и решаются средствами этой науки.

Естественным образом возникает вопрос о взаимосвязи между моделью $(x_{i+1} - x_i)/x_i = \alpha$, $i = t, t+1, ..., T-1$, изложенной в лекции 1 и рассмотренной здесь моделью. Поскольку $x_i = \sum_{a=1}^{a=100} x_{m,i,a} + x_{f,i,a}$, то первая модель, если она адекватна, должна быть следствием второй и ее внешняя характеристика α должна вычисляться по значениям внешних характеристик второй модели. Если это так, то часть соотношений второй модели можно заменить соотношениями первой и получить тем самым иерархическую декомпозицию второй модели. По своему характеру эта иерархическая декомпозиция мало чем отличается от иерархической декомпозиции модели $x = 4$, $x-y = 2$ модели $x+y = 6$, $x-y = 2$, о которой шла речь в первой лекции. Результаты, которые имеются в настоящее время в математической демографии (см., например, *Староверов О.В. Азы математической демографии. М.:Наука. 1997. 160 с.*), позволяют сформулировать условия, при которых такая декомпозиция существует.

Отметим удобство иерархической декомпозиции демографической модели, состоящее в том, что первая модель в этой декомпозиции дает общее, "агрегированное" представление об изучаемом процессе, вторая — проясняет его детали. Если такая декомпозиция существует, то выполнив ее мы увидим то, что на гуманитарном уровне естественно назвать "структура процесса". Если же такая декомпозиция не существует, то сам этот факт тоже является ценной информацией о демографическом процессе. Но этот факт является информацией только, если у нас есть *представление* о декомпозиции и об условиях при которых она существует.

3. На рис. 1 изображена возрастная структура населения России в 1994году. Видны 9 характерных периодов, связанных с социально-экономическими условиями жизни в России. (1) Период 1914-1920 гг. характризуется уменьшением рождаемости, вызванным первой мировой войной, революцией, разрухой после революции. (2)Период 1920-1928 гг. характеризуется повышением рождаемости, что объясняется с одной стороны реакцией на понижение рождаемости в предыдущие годы, с другой стороны оживлением экономики в период НЭПа. (3) Период 1929-1933 гг. характризуется уменьшением рождаемости, вызванным раскулачиванием и голодом. (4) Период 1936-1940 гг. характеризуется повышением рождаемости, вызванного запрещением абортов в 1936 году. (5) Период 1941-1945 гг. характеризуется уменьшением рождаемости, вызванного Великой Отечественной войной. (6) Период 1946-1960 гг. характеризуется повышением рождаемости, что объясняется реакцией на понижение рождаемости в предыдущие годы. (7) Период 1960-1970 характеризуется как демографическое эхо уменьшения рождаемости в период Великой Отечественной войной. (8) Период 1970-1990 характеризуется как демографическое эхо увеличения рождаемости в период 1946-1960. (9) Период 1991-настоящее время характеризуется уменьшением рождаемости, связанным с изменением социально-экономической структуры в России в настоящее время.

Из возрастного распределения населения России в 1984 году, приведенного на рис 1. достаточно очевидно, что, начиная с 2005 г. в России будет увеличиваться доля пенсионеров, поскольку в пенсионный возраст будут вступать люди с годом рождения, начиная с 1945, что соответствует увеличению рождаемости после Великой Отечественной войны и приблизительно в это же время доля активного населения будет уменьшаться, что соответствует демографическому эху уменьшения рождаемости в период Великой Отечественной войной. Этот вывод подтверждают расчеты по изложенной выше модели. Неблагоприятная возрастная структура населения, ожидаемая в России, с 2005 г. и продлящаяся около десятилетия, будет создавать нагрузку на экономику, способствовать увеличению социального напряжения в обществе, влиять на результаты выборов.

Конечно, доверять результатам прогнозов, полученных на базе данных 1994 г. можно в известных пределах. Имеющее место сейчас увеличение коэффициентов смертности в больших возрастах, приток населения в Россию из ближнего зарубежья может изменить прогнозируемую по данным 1994 г. картину. Это обстоятельство подчеркивает важность скорейшей переписи населения, которая позволит дать точный прогноз демографической ситуации и иметь полное представление о глубине предстоящего демографического кризиса. Однако, сам факт демографического кризиса в России ближайшее десятилетие не вызывает сомнения. Несомненно, что также как и демографический кризис на Земле в районе 2030 года, этот кризис примет системный характер, т.е. он будет иметь экономические, социальные, политические аспекты. Эволюцию возрастого распределения России в течении 1990 — 2026 годов при сохранении нынешних темпов рождаемости и сметности можно увидеть в иллюстрации по адресу: http://www.ccas.ru/Pavlovsky/Game/demogr.htm Можно повторить все то же самое, что в первой лекции говорилось о Мировом демографическом кризисе. Именно: все это должны иметь в виду политики, а аналитические структуры при политиках должны не только иметь в виду указанные обстоятельства, но уже сейчас (позже — будет поздно) разрабатывать возможные сценарии развития кризисной ситуации, связанной с демографическими процессами в России, используя при этом и средства математического моделирования, и на основе выполненного анализа предлагать политикам комплекс мер, которые могли бы ликвидировать или смягчить кризисные явления. Системный анализ кризиса, связанного с демографическим процессом в России, — сложная проблема, требующая как от обслуживающих политиков аналитических структур так и от самих политиков, культуры и образованности, владения всеми современными инструментами системного анализа, в том числе инструментами анализа и прогноза реальных процессов, основанными на математическом моделировании. Что касается математического моделирования, то, если политики и соответствующие аналитические структуры не обладают необходимым уровнем образования и культуры, то они не могут использовать этот инструмент. Более того, они и не должны его использовать. Потому что неправильное использование любого инструмента в любой сфере деятельности приносит не пользу, в вред, тем большую, чем мощнее инструмент.

Литература

1. Павловский Ю.Н. Имитационные модели и системы. М.: Фазис. 131 с.

2. Староверов О.В. Азы математической демографии. М.: Наука. 1997. 159 с.

3.Капица С.П. Общая теория роста человечества. М.: Наука. 1999. 190 с.

Лекция 3. Технологические аспекты математического моделирования. Математические и гуманитарные средства анализа и прогноза реальных явлений, процессов, систем.

1. Проанализируем процесс получения прогноза возрастного распределения населения с помощью средств математического моделирования. Для того, чтобы получить этот прогноз необходимо выполнить следующие действия

— составить модель;

— убедиться в том, что она замкнута и разработать процедуру вычисления значений внутренних характеристик при известных значениях внешних характеристик;

— идентифицировать модель, т.е. измерить (вычислить, определить некоторым способом) значения внешних характеристик модели, которые не являются управлениями;

— верифицировать модель, т.е. выяснить условия, при которых модель дает корректные предсказания;

— эксплуатировать модель, т.е. извлекать следствия из уравнений модели, в частности, вычислять значения внутренних характеристик модели и предсказывать свойства явления (процесса, системы), которые формулируются в терминах характеристик модели.

В рассмотренных лекциях 1 и 2 примерах математических моделей первые два действия достаточно просты. Все трудности практического получения прогноза сосредоточены в идентификации составленных моделей. В модели возрастного распределения для идентификации необходима перепись населения и знание коэффициентов смертности и рождаемости и зависимости этих коэффициентов от возраста и от номера года. Перепись населения является сложным и дорогим процессом, требующим многолетней подготовки. Необходимо разработать макеты опросных листов, разработать банк данных, где будет храниться собранная информация, разработать алгоритмы обработки собранной информации, разработать и отладить соответствующие программы, организовать перепись, актуализировать банк данных на основе собранной информации, выполнить обработку данных. Что касается коэффициентов рождаемости и смертности, то для их определения необходима информация о рождениях и смерти людей. Эта информация фиксируется ЗАГСами, а также медицинскими учреждениями. Она поступает в Госкомстат, где обрабатывается демографическими службами этой организации.

2. Описанный процесс получения прогноза развития демографического процесса является, в сущности, современной индустриальной технологией в плане экономическом мало отличающейся от любой другой технологии, производящей некоторую вещь, использующуюся при потреблении или необходимую или осуществления некоторого другого процесса или для обеспечения его должного течения. На описанный процесс можно смотреть как на обработку "информационного сырья ", добываемого "сырьевыми отраслями" (ЗАГСы, медицинская статистика). В процессе этой обработки используются разные инструменты и участвуют люди разной квалификации. Инструментами, в частности, является математические модели и компьютеры, людьми, в частности, являются математики, специалисты по статистике, демографы, программисты. Этот процесс с экономической точки зрения мало отличается от производства, например, обычного канцелярского стола. В самом

деле, для того что сделать стол, необходимо сначала добыть сырьё (древесину и другое сырье), обработать его соответствующим образом, привезти его мебельную фабрику, где с помощью целой совокупности инструментов и людей, владеющими этими инструменами, будет сделан стол.

3. Из рассмотренных примеров можно сделать некоторые выводы общего характера, касающиеся взаимоотношений между математическими и гуманитарными средствами изучения и прогноза реальных явлений (процессов, систем). Математическими средствами изучается и прогнозируется "простое" в реальных явлениях (процессах, системах). "Сложное" изучается гуманитарными средствами. Математические и гуманитарные средства взаимодействуют. Один из аспектов этого взаимодействия можно увидеть на примере изложенных моделей демографического процесса: математические модели порождают понятия и представления, которые затем используются при гуманитарном анализе данного процесса. Одну из демографических проблем (сильно огрубляя и утрируя, но не выкидывая существа дела) можно охарактеризовать как изучение влияния экономических, социальных, политических факторов на коэффициенты α_i, фигурирующие в первой из изложенных моделей, на коэффициенты $\beta_{m,i,a}, \beta_{f,i,a}, y_{m,i,a}, y_{f,i,a}$, $i = t, t+1, ..., T$, $a = 1, 2, ..., 100$, фигурирующие во второй, более подробной модели. Для изучения этой проблемы математические средства не годятся: эта проблема слишком сложена для математических средств при современном уровне их развития. Но сами эти характеристики α_i, $\beta_{m,i,a}, \beta_{f,i,a}$, $i = t, t+1, ..., T$, $a = 1, 2, ..., 100, \gamma_{m,i,a}, \gamma_{f,i,a}$, $i = t, t+1, ..., T$, $a = 15, 2, ..., 50$ возникли в результате математического моделирования. Суть дела состоит в том, что эти характеристики "почти освобождены" (см. ниже) от зависимости от значений соответствующих внутренних характеристик с помощью математической модели. Гуманитарный же анализ демографического процесса, выявляющий указанные их зависимость от экономических, социальных, политических факторов, который вряд ли когда будет доступен средствам математического моделирования, можно трактовать как "надстройку" над математической моделью. К этому можно добавить, что составлению математической модели неизбежно предшествует интуитивный, т.е. гуманитарный анализ изучаемого явления (процесса, системы). Два отмеченные аспекта взаимодействия математических и гуманитарных средств анализа и прогноза реальных явлений (процессов, систем) не являются исчерпывающими. В следующих лекциях обсуждение вопроса об этом взаимодействии будет продолжено.

Выше было сказано, что внешние характеристики α_i, $\beta_{m,i,a}, \beta_{f,i,a}$, $i = t, t+1, ..., T, a = 1, 2, ..., 100, \gamma_{m,i,a}, \gamma_{f,i,a}$, $i = t, t+1, ..., T$, $a = 15, 2, ..., 50$ рассмотренных выше математических моделей "почти освобождены" от зависимости от значений соответствующих внутренних характеристик. "Качество" математической модели зависит от того, с какой точностью выполняется лежащая в ее основе гипотеза об инвариантности. Как правило, качество математических моделей естественных физических процессов гораздо выше, чем качество социально-экономических процессов, примером которого является изучаемый здесь демографический процесс. При составлении математических моделей социально-экономических процессов очень трудно ввести внешние характеристики так, чтобы они совсем не зависили от внутренних. В большинстве случаев речь может идти только о минимизации такой зависимости. Например, внешние характеристики $\gamma_{m,i,a}, \gamma_{f,i,a}$,

$i = t, t+1, ..., T$, $a = 15, 2, ..., 50$, фигурирующие в модели эволюции возрасной структуры населения зависят на самом деле от внутренних характеристик $x_{m,i,a}, x_{f,i,a}$, $i = t+1, ..., T$, а $a = 1, 2, ..., 100$ этой модели. Для того, чтобы убедится в этом, предположим, что место соотношения $x_{m,t,a} = 0$, $a = 1, 2, ..., 100$, т.е. в начальный год t мужчины отсутствуют. Модель (3.3) - (3.6), однако, даст ненулевое количество родившихся мальчиков и девочек в годах $t+1, t+2, ...$ "Исправить" модель можно вводя, например, зависимость коэффициента рождаемости от отношения количества мужчин к количеству женщин. Изучение зависимости коэффициента рождаемости от этой характеристики — одна из проблем демографии, решение которой также недоступно в настоящее время средствам математического моделирования.

Литература

1. Павловский Ю.Н. Имитационные модели и системы. М.: Фазис. 131 с.

2. Староверов О.В. Азы математической демографии. М.: Наука. 1997. 159 с.

3.Капица С.П. Общая теория роста человечества. М.: Наука. 1999. 190 с.

Лекция 4. Примеры простейших математических моделей процессов планирования и управления. Простейшая задача об оптимальном раскрое.

1. В конце 30-ых годов молодой математик Л.В. Канторович в одном их производственных подразделений на заводе в г. Ленинграде наблюдал процесс раскроя заготовок на "детали". Из металлических листов - *заготовок*, вырезались плоские фигуры определенной формы - *детали.* Для дальнейшего производственного процесса требовалось несколько таких форм, т.е. деталей. Каждой детали припишем номер i. В рассуждениях общего характера будем считать, что число различных деталей, требуемых для производственного процесса, равно n. Таким образом, $i = 1, 2, ..., n$. На заводе было разработано несколько *способов раскроя* заготовок. Способы раскроя будем именовать номером j. В рассуждениях общего характера будем считать, что число различных способов раскроя равно m. Каждый способ раскроя j характеризовался количеством a_{ij} деталей с номером i, получающееся при этом способе раскроя, а также количеством отходов (обрезков) c_j. Процесс производственного планирования в подразделении завода осуществлялся по неделям. Каждую неделю (плановый период) подразделению "спускалось" задание, состоящее в указании количеств $b_i, i = 1, 2..., n$ по каждой детали, которое требуется выкроить в эту неделю, для того чтобы обеспечить производственный процесс в других подразделениях предприятия. Таким образом, в рассматриваемом подразделении завода возникала задача управления (планирования) производственным процессом, состоящая в указании количеств $x_j, j = 1, 2, ..., m$ заготовок, которое следует кроить по способу j. Задачи такого сорта в реальных производственных процессах решаются, как правило, "мастерами" соответствующих производственных подразделений. Л.В. Канторович разработал математическую модель описанной задачи, называемой сейчас (простейшей) задачей об оптимальном раскрое. Эта математическая модель "практически однозначно" (смысл этого словосочетания см. ниже) определяла значения величин $x_j, j = 1, 2, ..., m$ таким образом, что спущенное задание $b_i, i = 1, 2..., n$ выполнялось по каждой детали, а количество отходов было минимально. Разработанная Л.В. Канторовичем модель была впоследствии названа моделью линейного программирования. За ее разработку и за разработку методов решения возникшей задачи Л.В. Канторовичу была присуждена Нобелевская премия в области экономики.

2. Рассмотрим простой конкретный вариант задачи оптимального раскроя. Пусть заготовки являются листами размером 5×5. Единица измерения для дальнейшего несущественна. Пусть количество требуемых деталей равно трем и они имеют форму и размеры, изображенные на рис. 1. Пусть число способов раскроя равно двум. Эти способы раскроя изображены на рис. 2. Таким образом, $a_{11} = 2, a_{12} = 1, a_{21} = 1, a_{22} = 4, a_{31} = 4, a_{32} = 2$. При первом способе раскроя количество отходов, как видно из рис. 2 , равно 7,72, при втором — 5,86. Пусть в некотором плановом периоде деталей с номером 1 требуется 10, с номером 2 — 12, с номером 3 — 8.

Обозначим через x_1 количество заготовок, которые кроятся по первому способу, через x_2 количество заготовок, которые кроятся по второму способу. Числа $x_j, j = 1, 2$ являются целыми и имеет место $x_j \geq 0$, $j = 1, 2$. Количество деталей с номером 1, которое получится при выбранных управлениях $x_j, j = 1, 2$, равно

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2,$$

количество деталей с номером 2, которое получится при выбранных управлениях $x_j, j = 1, 2$, равно

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2,$$

количество деталей с номером 3, которое получится при выбранных управлениях $x_j, j = 1, 2$, равно

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2.$$

Для того, чтобы выполнить план по раскрою деталей, достаточно, чтобы управления $x_j, j = 1, 2$ удовлетворяли соотношениям

$$x_1 \geq 0 \tag{1}$$

$$x_2 \geq 0 \tag{2}$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq 10 \tag{3}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \geq 12 \tag{4}$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2. \geq 8 \tag{5}$$

Эти соотношения будут называться далее "ограничениями". При выбранных управлениях $x_j, j = 1, 2$ количество отходов будет равно

$$7,72x_1 + 5,86x_2 \tag{6}$$

Таким образом возникает математическая задача: найти целые неотрицательные числа $x_j, j = 1, 2$ так, чтобы выполнялись соотношения (1-5) и при этом величина (6) принимала возможно меньшее значение.

Поставленная задача имеет наглядную геометрическую интерпретацию. Рассмотрим плоскость с координатами (x_1, x_2). На рис. 3 на этой плоскости изображены прямые

$$x_1 = 0 \tag{7}$$

$$x_2 = 0 \tag{8}$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 10 \tag{9}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 12 \tag{10}$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 = 8 \qquad (11),$$

а также прямая

$$7,72x_1 + 5,86x_2 = c(12)$$

при нескольких значениях c. Ясно, что множество управлений, которые удовлетворяют ограничениям (1-5), образует выпуклый неограниченный многоугольник. Каждая вершина этого многоугольника является решением системы из двух уравнений с двумя неизвестными. Каждая такая система получается, если взять некоторые два уравнения из числа (7-11). Получаемое каждый раз решение нужно проверить на выполнение всех ограничений (1-5) и те, которые не удовлетворяют хотя бы одному ограничению из этого числа, далее не рассматривать, поскольку они не являются искомыми вершинами многоугольника. Ясно, что решением поставленной задачи является одна из полученных таким образом вершин. Та именно, для которой число c, вычисленное по формуле (12) принимает наименьшее значение. Ясно, что решением поставленной задачи является $x_1 = 4, x_2 = 2$.

3. Дадим общую формулировку простейшей задачи об оптимальном раскрое. Заданными (внешними характеристиками модели) являются числа a_{ij}, $i = 1, ..., n$, $j = 1, 2, ..., m$ — количество деталей с номером i, которое получается при способе раскроя с номером j, числа $b_i, i = 1, 2, ..., n$ — количество деталей с номером i, которое необходимо выкроить в рассматриваемом плановом периоде, а также числа c_j, $j = 1, 2, ..., m$ — количество отходов, получающееся при j-ом способе раскроя. Необходимо определить целые неотрицательные числа x_j, $j = 1, 2, ..., m$ таким образом, чтобы выполнялись соотношения

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, ..., m \tag{13}$$

$$\sum_{j=1}^{j=m} a_{ij} x_j \geq b_i, i = 1, 2, ..., n \tag{14}$$

и при этом число (т.е. количество отходов)

$$c = \sum_{j=1}^{j=m} c_j x_j$$

приняло возможно меньшее значение. Последнее условие принято обозначать следующим образом

$$\sum_{j=1}^{j=m} c_j x_j \to min \tag{15}$$

Также как в рассмотренной выше конкретной задаче, ограничения (13,14) формируют в m-мерном пространстве выпуклый многогранник. Решением поставленной задачи является либо только его некоторая (единственная) вершина либо его грань размерности от 1 до m. В последнем случае решение не единственно. Однако на практике это почти исключенная ситуация. Именно это обстоятельство имелось в виду, когда выше говорилось, что математическая модель Л.В. Канторовича "практически однозначно" определяет значения величин $x_j, j = 1, 2, ..., m$. Модель (13-15) является классической моделью задачи назначения управлений, которую принято называть моделью линейного программирования. Также, как и в рассмотренном выше конкретном примере, получить решение поставленной задачи можно определив все вершины многоугольника, формируемого ограничениями (13-14) и сравнив значение функции

$$c = \sum_{j=1}^{j=m} c_j x_j$$

в этих вершинах. Наиболее распространенным методом решения задачи линейного программирования является так называемый симплекс-метод. В симплекс-методе число решений систем линейных алгебраических уравнений минимизируется путем организации "направленного" перебора вершин: каждая новая вершина является "соседней" для предыдущей и уменьшает значение функции

$$c = \sum_{j=1}^{j=m} c_j x_j.$$

В настоящее время имеется много разных вариантов этого метода. В значительной мере многообразие этих методов определяется многообразием особенностей, которыми обладают матрицы $a_{ij},\ i = 1, ..., n,\ j = 1, 2, ..., m$, числа $b_i, i = 1, 2, ..., n$ и числа $c_j,\ j = 1, 2, ..., m$ в различных конкретных задачах. Специфика этих внешних данных порождает методы решения задачи линейного программирования, эффективные именно для задач с данной спецификой. Имеются также диалоговые системы для решения задач линейного программирования. Входной язык (совокупность правил и обозначений, с помощью которых формулируется задача) у таких систем близок к естественному, т.е. задача линейного программирования записывается примерно также, как она записана выше. Метод решения может задать пользователь, или он по умолчанию может быть определен самой системой. Разработка методов решения задач линейного программирования, разработка соответствующих программ для компьютера и разработка диалоговых систем для решения задач линейного программирования является существенной сферой исследований и производственной деятельности в области прикладной математики и информатики.

4. Изложим теперь историю внедрения первой задачи линейного программирования в 1939 году на одном ленинградском заводе. Л.В. Канторович не только составил модель задачи управления процессом раскроя, разработал алгоритм решения возникшей математической задачи, но и внедрил оптимальное управление процессом раскроя на указанном заводе. Некоторое время на заводе кроили по Л.В. Канторовичу. Однако вскоре у завода возникла угроза невыполнения плана по сдаче металлолома. Кроме того, возникла также проблема сопровождения решения задачи линейного программирования. Дело в том, что при изменении время от времени чисел $b_i, i = 1, 2, ..., n$, задачу по определению оптимальных чисел $x_j, j = 1, 2, ..., m$ нужно было решать заново. Квалификация персонала завода не позволяла обучить кого-либо из этого персонала решать подобные задачи. В силу указанных причин, из которых главная — первая, оптимальный раскрой на заводе был прекращен.

В прекращении оптимального раскроя по причине невыполнения плана по сдаче металлолома нет ничего противоестественного. Существуют сталеплавильные заводы (например, завод "Серп и молот" в Москве), которые используют в качестве сырья металлолом. Из металлолома варится высококачественная сталь, в частности, инструментальная сталь. Хотя объемы производства металла из металлолома не очень велики, продукт такого производства занимает важное место в общей структуре производственного процесса и сокращение этих объемов является фактором, дестабилизирующим многие производственные процессы. Именно поэтому в системе технико-экономического планирования в плановой системе, имевшей место в СССР, появился показатель объема сдачи металлолома у соответствующих предприятий. В плановой системе никакой руководитель предприятия не будет заботится об утилизации металлолома, если объем сдачи металлолома не фигурирует в плане и выполнение плана по этому показателю не контролируется достаточно жестко.

Наличие отрицательных последствий внедрения оптимального раскроя (вместе с положительными, связанными с уменьшением отходов) не являются свойством, присущим только плановой социально-экономической системе. Внедрение оптимального планирования и/или управления без всестороннего (системного) анализа последствий такого внедрения в подавляющем большинстве случаев приведет не к рационализации производственного процесса, а наоборот к его дестабилизации. "Разрушительный элемент", который несет в себе оптимизация управления (планирования) при отсутствии системного анализа последствий этой оптимизации в очень утрированной форме, сохраняя, однако, суть дела, поясним на такой умозрительной ситуации. Во многих случаях раскрой выполняется с помощью инструментов (штампы, резаки), которые делаются из тех самых отходов (т.е. из инструментальной стали), которые возникают в результате раскроя. Если раскрой выполняется не только оптимально, но и идеально, т.е. отходов в результате раскроя не получается вообще, то этот идеальный раскрой и вместе с ним весь производственный процесс может продолжаться только до тех пор, пока не выйдут из строя указанные инструменты, что обязательно когда-нибудь случится. Ту же самую мысль выскажем в другой форме. Представим себе, что в рыночной системе все предприятия, выполняющие раскрой из металлических листов, научились кроить идеально. Тогда через некоторое время неизбежно повысится цена на инструментальную сталь и предприятия, выполняющие раскрой могут в результате не выиграть, а проиграть.

Представим себе ситуацию, когда некоторое современное предприятие, работающее в рыночной экономической системе, изыскивает возможности повышения экономической эффективности. В одном из подразделений этого предприятия выполняется раскрой заготовок на детали. Проанализируем, что нужно предпринять для того, чтобы выяснить выгодно или нет внедрять на данном предприятии оптимальный раскрой.

Прежде всего нужно знать являются ли известными заранее все варианты заданий $b_i, i = 1, 2, ..., n$, которые могут возникнуть на данном заводе. Если все варианты заданий заранее известны, то для каждого из них можно также заранее решить соответствующую задачу, получить план $x_j, j = 1, 2, ..., m$ оптимального раскроя и при возникновении данного задания использовать соответствующий этому заданию план. В этом случае нет необходимости в оперативном решении задачи управления и управленческому персоналу подразделения нужно лишь выполнять раз и навсегда разработанную стратегию (стратегией здесь называется соответствие между числами $b_i, i = 1, 2, ..., n$ и оптимальным планом $x_j, j = 1, 2, ..., m$, дающим решение оптимизационной задачи при этих числах). В этом случае для управленческого персонала достаточно разработать соответствующую инструкцию и нет необходимости в повышении его квалификации до такого уровня, при котором люди понимают, что такое задача линейного программирования, что такое симплекс-метод и так далее.

Если же числа $b_i, i = 1, 2, ..., n$ заданий заранее неизвестны, то необходима организация оперативного сопровождения процесса управления. Далее рассматривается именно этот случай. При этом необходима соответствующая квалификация управленческого персонала, что влечет увеличение расходов на их зарплату.

Заметим, что очень редко на предприятии, где одним из технологических процессов является раскрой, изложенная выше простейшая задача адекватно отражает реальный процесс раскроя. В настоящее время имеется много различных вариантов постановки задачи об оптимальном раскрое, отражающих различные варианты этого процесса на конкретных предприятиях. Поэтому прежде всего нужно познакомиться со сферой исследования задач раскроя и определить рассматривалась ли в этой сфере задача, соответствующая тому процессу раскроя, который имеет место на данном предприятии.

Рассмотрим сначала первый случай, т.е. случай, когда такая задача рассматривалась. Далее на этот случай будем ссылаться как на случай "а". Противоположный случай обозначим через "б". В случае "а" опять возможны два случая — "аа" и "аб". Случай "аа" состоит в том, что имеется соответствующее программное обеспечение, отлаженное и испытанное, которое можно немедленно использовать, случай "аб" состоит в том, что имеется алгоритм решения задачи, проверенный лишь на модельных примерах. Как правило, в случае "аа", на некотором предприятии реализуется такой же процесс раскроя и это предприятие уже эксплуатирует нужное программное обеспечение. Далее также возможно два варианта в зависимости от того, сколь часто меняются в различных плановых периодах числа $b_i, i = 1, 2, ..., n$, характеризующие план по каждой детали в данном плановом периоде. Если эти числа меняются достаточно редко, может оказаться нерациональным приобретать и организовывать эксплуатацию соответствующего программного обеспечения. Выгоднее каждый раз, когда возникают новые значения чисел $b_i, i = 1, 2, ..., n$ обращаться в специализированную фирму, которая выполняет решения подобных задач по заказам организаций. Если же числа $b_i, i = 1, 2, ..., n$ меняются часто, необходимо анализировать возможность закупки имеющегося программного обеспечения и вопрос о его сопровождении. Подчеркнем необходимость сопровождения программного обеспечения, который в настоящее время недооценивается многими менеджерами (эта недооценка является следствием недостаточного знания технологии математического моделирования, т.е. недостаточного знания того, как происходит эксплуатация математической модели). Эксплуатацию любого программного обеспечения достаточного объема и сложности необходимо сопровождать также, как необходимо сопровождать эксплуатацию любого технического устройства. Если эксплуатация некоторого технического устройства (например, автомашины) не сопровождается (не проводятся профилактические ремонты, не ликвидируются поломки), то через некоторое время оно перестанет нормально функционировать. Точно также дело обстоит с программным обеспечением достаточного объема и сложности . Например, во всякой программе, сложность которой превышает некоторые пределы, имеются ошибки, программа может перестать работать при модернизации вычислительной техники, установки новой версии операционной системы и т.д.

Вернемся к началу нашего анализа и рассмотрим случай "б", когда постановка задачи об оптимальном раскрое, адекватной ситуации на данном предприятии, отсутствует в сфере исследования задач об оптимальном раскрое. В этом случае нужно решить вопрос о том, заказывать или нет специалистам (т.е. фирмам, которые специализируются на выполнении таких заказов) разработку нужной постановки задачи и разработку алгоритма решения этой задачи, что влечет необходимость определенных расходов. При положительном ответе на этот вопрос, после разработки постановки нужной задачи и разработки алгоритма ее решения возникнет ситуация, обозначенная выше как случай "аб". В этом случае необходимо решить вопрос о том, заказывать или нет соответствующим специалистам разработку программного обеспечения, его отладку и опытную эксплуатацию на предприятии, а также решать вопрос о том закупать это программное обеспечение и огранизовывать его сопровождение или использовать фирму-разработчика для решения задачи об оптимальном раскрое каждый раз, когда это необходимо — в зависимости от частоты, с которой меняются числа $b_i, i = 1, 2, ..., n$.

Рассмотренные случаи не исчерпывают всех ситуаций, которые могут встретится на практике. Например, достаточно типичной является следующая ситуация: изменение плана раскроя $x_j, j = 1, 2, ..., m$ по условиям производства невозможно в течении некоторого времени, включающего несколько плановых периодов, однако, числа $b_i, i = 1, 2, ..., n$ могут меняться каждый плановый период. Такие ситуации требуют более сложного анализа с использованием средств исследования операций и привлечения в процессе этого анализа более подробной информации о производственном процессе на предприятии.

С каждым из рассмотренных случаев связаны некоторые расходы, которые нужно уметь прогнозировать заранее, для того, чтобы вынести суждение о целесообразности внедрения оптимального раскроя на данном предприятии. Окончательный ответ может быть как положительным, так и отрицательным. Имеется достаточное количество примеров, когда в США предприятия разорялись по той причине, что внедряли у себя методы оптимального управления без системного анализа всех последствий такого внедрения. Имеются, конечно, и противоположные примеры.

5. Дадим одну рекомендацию общего характера и приведем ее обоснование. Эта рекомендация состоит в том, что, если расходы, связанные с внедрением методов оптимального управления, либо равны выгоде от этого внедрения, либо даже несколько превосходят эту выгоду, то внедрять методы оптимального управления нужно. Методы оптимального планирования и управления и, вообще, средства теории управления и исследования операций — это инструменты в области анализа и прогноза реальных явлений, процессов, систем. В любой области деятельности совершенствование используемых в ней инструментов определяется не только развитием самой этой области, но некоторой своей, "внутренней" логикой развития. Совершенствование инструментов оказывает затем обратное влияние на то, что производится в данной сфере деятельности, меняя потребительские качества производимых вещей и вызывая производство новых вещей, которые без этих усовершенствованных инструментов сделать невозможно.

Инструменты в области прогноза и анализа явлений, процессов, систем, основанные на средствах теории управления и исследования операций, не являются исключением из общего правила. Предприятия, организации, фирмы, где эти инструменты используются, включаются также в процесс их совершенствования, смены их поколений, в процесс влияния их на потребительские качества производимых товаров. Поэтому расходы на внедрение средств теории управления и исследования операций в определенной мере являются одной из форм инвестиций в новые производства. Предприятие, где эти средства используются и, значит, совершенствуются, через некоторое время будет способно производить то, что без эти средств произвести нельзя. Точно также обстоит дело с любыми другими инструментами используемыми в любой области деятельности.

Литература

1. Канторович Л.В., Горстко А.Б. Оптимальные решения в экономике. М.: Наука. 1972. 232 с.

2. Павловский Ю.Н. Имитационные модели и системы. М.: Фазис. 131 с.