УДК 519.86

Показатели нерациональности потребительского поведения и обобщенный непараметрический метод

Л.Я.Поспелова, А.А.Шананин

Вычислительный Центр РАН, Москва

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-00664)

Исследуется обобщение непараметрического метода построения индексов спроса и цен, применимое при нарушении гипотезы о рациональности потребительского поведения. Изучается связь показателей, характеризующих степень нерациональности потребительского поведения. Приближенный непараметрический метод, основанный на использовании показателя нерациональности поведения в качестве поправки, применяется для построения дерева экономических индексов.

The value of nonrationality for consumer behavior and generalized nonparametric method

L.Ia.Pospelova, A.A.Shananin
Computing Center RAS, Moscow
The generalization of nonparametric method of demand and price indices construction for the case of nonrational consumer behavior is investigated. We consider the relationships between the characteristics of nonrationality consumer behavior. We construct the utility tree by means of approximated nonparametric method based on the using the characteristic of nonrationality.

1. Введение

В [1-4] был разработан непараметрический метод анализа структуры потребительского спроса. В основе метода лежит гипотеза о рациональности потребительского поведения. Если исходная информация о функциях потребительского спроса удовлетворяет этой гипотезе, то непараметрический метод позволяет вычислить индекс потребительских цен и функцию полезности (индекс спроса), построить дерево экономических индексов и прогнозировать по имеющейся информации структуру потребительского спроса (см. [4]).

Отметим, что построение дерева экономических индексов формально также сводится к проверке гипотезы о рациональности поведения на соответствующим образом модифицированных исходных данных. При модификации данных используется решение некоторой системы линейных неравенств (см. [4]). Поскольку эта система, вообще говоря, имеет множество решений, возникает неоднозначность в процедуре модификации исходных данных. В численных реализация непараметрического метода выбирается в соответствии с алгоритмом Варшала – Флойда конкретное решение этой системы линейных неравенств. При этом такой вариант модификации может не удовлетворять гипотезе о рациональности поведения, хотя другие решения системы линейных неравенств могли давать модификации, удовлетворяющие этой гипотезе. В тоже время перебор всех возможных модификаций существенно повысил бы трудоемкость непараметрического метода.

Неточность исходной статистической информации также может приводить к нарушению гипотезы о рациональности поведения. Таким образом, возникает потребность в приближенном методе, который был бы применим к исходным данным, «почти» удовлетворяющим гипотезе о рациональности поведения. В [5-6] было предложено обобщение непараметрического метода, применимое к исходным

данным, не удовлетворяющим этой гипотезе. В данной статье это обобщение исследуется и применяется для построения одной из важнейших характеристик потребительского спроса – дерева экономических индексов.

2. Критерии и мера нерациональности потребительского поведения

Рассмотрим группу из m видов товаров. Обозначим через $\mathbf{X} = (X_1,...,X_m)$ произвольный набор этих продуктов, а через $\mathbf{p} = (p_1,...,p_m)$ вектор цен на них. В экономической теории принято описывать потребительское поведение с помощью функций спроса $\mathbf{X}(\mathbf{p}) = (X_1(\mathbf{p}),...,X_m(\mathbf{p}))$, определяющих зависимость объемов покупок потребителей от цен, или обратных функций спроса $\mathbf{P}(\mathbf{X}) = (P_1(\mathbf{X}),...,P_m(\mathbf{X}))$ (при этом $\mathbf{X}(\mathbf{P}(\mathbf{X})) = \mathbf{X}$).

Говорят, что обратные функции спроса $\mathbf{P}(\mathbf{X})$ удовлетворяют гипотезе о рациональности поведения, если существует такая функция полезности $F(\mathbf{X})$ (индекс спроса), что $\mathbf{X}$ является решением следующей задачи о максимизации функции полезности при бюджетном ограничении

$$\begin{aligned} &F(\mathbf{Y}) \to \max \\ &\mathbf{P}(\mathbf{X})\mathbf{Y} \le \mathbf{P}(\mathbf{X})\mathbf{X}, \\ &\mathbf{Y} = (Y_1,...,Y_m) \ge 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь $\mathbf{pY} = \sum_{i=1}^{m} p_i Y_i$ стоимость набора товаров $\mathbf{Y}$ при ценах $\mathbf{p}$. Предполагается, что функция $F(\mathbf{X})$ удовлетворяет априорным требованиям. Будем считать, что она является непрерывной, вогнутой, положительно однородной первой степени и положительной на $\operatorname{int} R_+^m$ функцией.

Определение (см. [3]). *Будем говорить, что обратные функции спроса* $\mathbf{P}(\mathbf{X})$ *удовлетворяют однородной сильной аксиоме теории выявленного предпочтения (ОСА), если для набора векторов* $\{\mathbf{X}^1,...,\mathbf{X}^T\}$ *из* R_+^m *справедливо неравенство*

$$(\mathbf{P}(\mathbf{X}^1)\mathbf{X}^2)(\mathbf{P}(\mathbf{X}^2)\mathbf{X}^3)...(\mathbf{P}(\mathbf{X}^T)\mathbf{X}^1) \ge (\mathbf{P}(\mathbf{X}^1)\mathbf{X}^1)(\mathbf{P}(\mathbf{X}^2)\mathbf{X}^2)...(\mathbf{P}(\mathbf{X}^T)\mathbf{X}^T). \tag{2.2}$$

X **Предложение 1.** *Пусть* $\mathbf{P}(\mathbf{X})$ *неотрицательная, непрерывная вектор функция на* R_+^m*, такая что* $\mathbf{P}(\mathbf{X})\mathbf{X} > 0$ *при любых* $\mathbf{X} \in R_+^m \setminus \{0\}$*. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

X *1. обратные функции спроса* $\mathbf{P}(\mathbf{X})$ *удовлетворяют гипотезе о рациональности поведения;*

2. система линейных неравенств $\lambda(\mathbf{Y})(\mathbf{P}(\mathbf{Y})\mathbf{X}) \ge \lambda(\mathbf{X})(\mathbf{P}(\mathbf{X})\mathbf{X})$*, где* $\mathbf{X},\mathbf{Y} \in \operatorname{int} R_+^m$*, имеет решение* $\lambda(\mathbf{X})$*, положительное и непрерывное на* $\operatorname{int} R_+^m$*;*

3. обратные функции спроса $\mathbf{P}(\mathbf{X})$ *удовлетворяют ОСА.*

Доказательство. Покажем, что из утверждения 1 следует утверждение 2. Пусть $F(\mathbf{X})$ положительно однородная функция полезности, соответствующая обратным функциям спроса $\mathbf{P}(\mathbf{X})$. Определим функцию

$$q(\mathbf{p}) = \inf_{\{\mathbf{X} \ge 0 \mid F(\mathbf{X}) > 0\}} \frac{\mathbf{pX}}{F(\mathbf{X})}. \tag{2.3}$$

В [7] показано, что $q(\mathbf{p})$ непрерывная, положительная на $\operatorname{int} R_+^m$ функция. Положим

$$\lambda(\mathbf{X}) = \frac{1}{q(\mathbf{P}(\mathbf{X}))}. \tag{2.4}$$

Из того, что $\mathbf{X}$ является решением задачи (2.1) следует, что

$$q(\mathbf{P}(\mathbf{X}))F(\mathbf{X}) = \mathbf{P}(\mathbf{X})\mathbf{X}. \qquad (2.5)$$

В силу (2.3) имеем, что

$$q(\mathbf{P}(\mathbf{Y}))F(\mathbf{X}) \le \mathbf{P}(\mathbf{Y})\mathbf{X}. \qquad (2.6)$$

Из (2.4) и (2.5) следует, что $q(\mathbf{P}(\mathbf{Y}))(\mathbf{P}(\mathbf{X})\mathbf{X}) \le q(\mathbf{P}(\mathbf{X}))(\mathbf{P}(\mathbf{Y})\mathbf{X})$. Откуда с учетом определения (2.4) получаем утверждение 2.

В обратную сторону, для вывода утверждения 1 из утверждения 2 достаточно положить

$$F(\mathbf{X}) = \inf_{\mathbf{Y}\in \mathrm{int}\mathbf{R}^m_+} \left(\lambda(\mathbf{Y})\mathbf{P}(\mathbf{Y})\mathbf{X}\right)$$

и заметить, что так определенная функция $F(\mathbf{X})$ является непрерывной, вогнутой, положительно однородной первой степени функцией, удовлетворяющей соотношениям

$$F(\mathbf{X}) = \lambda(\mathbf{X})\mathbf{P}(\mathbf{X})\mathbf{X}, \quad \lambda(\mathbf{X})\mathbf{P}(\mathbf{X}) \in \partial F(\mathbf{X}).$$

Покажем, что утверждение 3 следует из утверждения 2. Прежде всего заметим, что в силу непрерывности обратных функций спроса достаточно доказать справедливость неравенства (2.2) для произвольного набора векторов $\{\mathbf{X}^1,...,\mathbf{X}^T\}$ из $\mathrm{int}\,R^m_+$. Перемножая неравенства

$$\lambda(\mathbf{X}^1)(\mathbf{P}(\mathbf{X}^1)\mathbf{X}^2) \ge \lambda(\mathbf{X}^2)(\mathbf{P}(\mathbf{X}^2)\mathbf{X}^2),$$
$$\lambda(\mathbf{X}^2)(\mathbf{P}(\mathbf{X}^2)\mathbf{X}^3) \ge \lambda(\mathbf{X}^3)(\mathbf{P}(\mathbf{X}^3)\mathbf{X}^3),$$
$$.....$$
$$\lambda(\mathbf{X}^{T-1})(\mathbf{P}(\mathbf{X}^{T-1})\mathbf{X}^T) \ge \lambda(\mathbf{X}^T)(\mathbf{P}(\mathbf{X}^T)\mathbf{X}^T)$$
$$\lambda(\mathbf{X}^T)(\mathbf{P}(\mathbf{X}^T)\mathbf{X}^1) \ge \lambda(\mathbf{X}^1)(\mathbf{P}(\mathbf{X}^1)\mathbf{X}^1)$$

и сокращая на общий положительный множитель $\lambda(\mathbf{X}^1)\lambda(\mathbf{X}^2)...\lambda(\mathbf{X}^T)$, получаем (2.3). Вывод утверждения 2 из утверждения 3 получается как следствие критерия непустоты множества допустимых решений в задаче двойственной к задаче Монжа – Канторовича (см. [8,9]). Действительно, обозначая

$$b(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \frac{(\mathbf{P}(\mathbf{Y})\mathbf{X})}{(\mathbf{P}(\mathbf{X})\mathbf{X})},\ u(\mathbf{X}) = \ln(\lambda(\mathbf{X})),$$

получаем, что система линейных неравенств из утверждения 2 имеет вид

$$b(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \ge u(\mathbf{X}) - u(\mathbf{Y})$$

и совпадает с ограничениями в двойственной задаче к задаче Монжа – Канторовича. Предложение 1 доказано.

Предположим теперь дополнительно, что обратные функции спроса $\mathbf{P}(\mathbf{X})$ являются непрерывно дифференцируемыми в $\mathrm{int}\,R^m_+$. Пусть номенклатура товаров разбита на две группы и в соответствии с этим разбиением введем обозначения

$$\mathbf{X} = (\mathbf{W},\mathbf{V}), \mathbf{p} = (\mathbf{r},\mathbf{s}), \mathbf{P}(\mathbf{X}) = (\mathbf{R}(\mathbf{W},\mathbf{V}), \mathbf{S}(\mathbf{W},\mathbf{V})),$$

где $\mathbf{W} \in R^n_+, \mathbf{r} \in R^n_+, \mathbf{V} \in R^e_+, \mathbf{s} \in R^e_+, n+e=m$. Рассмотрим вопрос о существовании функции полезности $G(\mathbf{W})$, рационализирующей обратные функции спроса $\mathbf{R}(\mathbf{W},\mathbf{V})$, т.е. такой что в задаче

$$G(\mathbf{W}) \to \max$$
$$\mathbf{R}(\mathbf{W},\mathbf{V})\mathbf{Z} \le \mathbf{R}(\mathbf{W},\mathbf{V})\mathbf{W}, \qquad (2.7)$$
$$\mathbf{Z} \ge 0$$

оптимальное решение достигается на векторе $\mathbf{W}$.

В [10] доказано, что для существования дважды непрерывно дифференцируемой функции полезности $G(\mathbf{W})$, рационализирующей обратные функции спроса $\mathbf{R}(\mathbf{W},\mathbf{V})$, необходимо, чтобы они удовлетворяли

1. условию отделимости:

$$\frac{\mathbf{R}_i(\lambda\mathbf{W},\mathbf{V})}{\mathbf{R}_j(\lambda\mathbf{W},\mathbf{V})}=\frac{\mathbf{R}_i(\mathbf{W},\mathbf{V})}{\mathbf{R}_j(\mathbf{W},\mathbf{V})} \quad \text{при любых } (\mathbf{W},\mathbf{V})\in R_+^m\setminus\{0\},\lambda>0,i,j=1,...,n;$$

2. ослабленному закону Хикса:

для любого вектора $\mathbf{Z}=(Z_1,...,Z_n)\neq 0$ такого, что $\mathbf{R}(\mathbf{W},\mathbf{V})\mathbf{Z}=0$ справедливо неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial R_i(\mathbf{W},\mathbf{V})}{\partial W_j}Z_iZ_j\le 0; \tag{2.8}$$

3. условию интегрируемости Фробениуса:

для любых $i,j,k \quad (1\le i<j<k\le n)$ справедливо равенство

$$R_i(\mathbf{W},\mathbf{V})\left[\frac{\partial R_j(\mathbf{W},\mathbf{V})}{\partial W_k}-\frac{\partial R_k(\mathbf{W},\mathbf{V})}{\partial W_j}\right]+R_j(\mathbf{W},\mathbf{V})\left[\frac{\partial R_k(\mathbf{W},\mathbf{V})}{\partial W_i}-\frac{\partial R_i(\mathbf{W},\mathbf{V})}{\partial W_k}\right]+$$

$$R_k(\mathbf{W},\mathbf{V})\left[\frac{\partial R_i(\mathbf{W},\mathbf{V})}{\partial W_j}-\frac{\partial R_j(\mathbf{W},\mathbf{V})}{\partial W_i}\right]=0.$$

Отметим, что если потребовать выполнения закона Хикса, т.е. строгого неравенства в (2.8), то эти условия становятся достаточными.

Предложение 2. *Пусть* $F(\mathbf{X})$ *и* $G(\mathbf{W})$ *дважды непрерывно дифференцируемые функции полезности, рационализирующие соответственно обратные функции спроса* $\mathbf{P}(\mathbf{X})$ *и* $\mathbf{R}(\mathbf{W},\mathbf{V})$. *Обозначим*

$$u(\mathbf{r})=\inf_{\{\mathbf{W}\ge 0|G(\mathbf{W})>0\}}\frac{\mathbf{rW}}{G(\mathbf{W})}.$$

Для того, чтобы существовала дважды непрерывно дифференцируемая функция $H(G,\mathbf{V})$ *такая, что* $F(\mathbf{X})=H(G(\mathbf{W}),\mathbf{V})$, *необходимо и достаточно, чтобы при всех* $a=1,...,e,\ i,j=1,...,n$ *выполнялись соотношения*

$$\det\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\left(\dfrac{S_a(\mathbf{W},\mathbf{V})}{u(\mathbf{R}(\mathbf{W},\mathbf{V}))}\right)}{\partial W_i}, & \dfrac{\partial\left(\dfrac{S_a(\mathbf{W},\mathbf{V})}{u(\mathbf{R}(\mathbf{W},\mathbf{V}))}\right)}{\partial W_j}\\ \dfrac{\partial G(\mathbf{W})}{\partial W_i}, & \dfrac{\partial G(\mathbf{W})}{\partial W_j}\end{pmatrix}=0. \tag{2.9}$$

Доказательство. Как показано в [10], с помощью теоремы Куна - Таккера условия рационализирумости обратных функций спроса могут записаны в виде

$$q(\mathbf{P}(\mathbf{X}))dF(\mathbf{X})=\sum_{i=1}^{n}R_i(\mathbf{W},\mathbf{V})dW_i+\sum_{a=1}^{e}S_a(\mathbf{W},\mathbf{V})dV_a, \tag{2.10}$$

$$u(\mathbf{R}(\mathbf{W},\mathbf{V}))dG(\mathbf{W})=\sum_{i=1}^{n}R_i(\mathbf{W},\mathbf{V})dW_i. \tag{2.11}$$

Из (2.10), (2.11) следует, что

$$q(\mathbf{P}(\mathbf{X}))dF(\mathbf{X})=u(\mathbf{R}(\mathbf{W},\mathbf{V}))dG(\mathbf{W})+\sum_{a=1}^{e}S_a(\mathbf{W},\mathbf{V})dV_a. \tag{2.12}$$

Соотношение $F(\mathbf{X})=H(G(\mathbf{W}),\mathbf{V})$ эквивалентно равенству

$$dF(\mathbf{X}) = \frac{\partial H(G(\mathbf{W}),\mathbf{V})}{\partial G} dG(\mathbf{W}) + \sum_{a=1}^{e} \frac{\partial H(G(\mathbf{W}),\mathbf{V})}{\partial V_a} dV_a \ . \qquad (2.13)$$

Сопоставляя (2.12) и (2.13), получаем, что для выполнение (2.13) необходимо и достаточно, чтобы при всех $a = 1,...,e$ имелись функциональные представления

$$\frac{S_a(\mathbf{W},\mathbf{V})}{u(\mathbf{R}(\mathbf{W},\mathbf{V}))} = \varphi_a(G(\mathbf{W}),\mathbf{V}),$$

возможность которых эквивалентна (2.9). Предложение 2 доказано.

Итак, в предложении 2 получены условия разложимости функции полезности $F(\mathbf{X})$ в суперпозицию функций полезности $H(G,\mathbf{V})$ и $G(\mathbf{W})$, зависящих от меньшего числа переменных. Процедуру разложения функции полезности в суперпозицию функций, зависящих от меньшего числа переменных, можно применять многократно, раскладывая функции $H(G,\mathbf{V})$, $G(\mathbf{W})$ и затем функции, возникающие в результате этих разложений. Таким образом номенклатура товаров разбивается на подгруппы, для которых функции спроса также удовлетворяют гипотезе о рациональности поведения, существуют экономические индексы, и функция полезности может быть представлена в виде суперпозиции соответствующих индексов. Это разбиение называется деревом экономических индексов (см. [11-12]). Дерево экономических индексов является описанием сегментации рынка потребительских товаров и услуг.

Предложение 3. *Пусть* $\mathbf{P}(\mathbf{X})$ *неотрицательная, непрерывно дифференцируемая вектор функции на* R_+^m*, такая что* $\mathbf{P}(\mathbf{X})\mathbf{X} > 0$ *при любых* $\mathbf{X} \in R_+^m \setminus \{0\}$*, выполняются условия отделимости*

$$\frac{P_i(\lambda\mathbf{X})}{P_j(\lambda\mathbf{X})} = \frac{P_i(\mathbf{X})}{P_j(\mathbf{X})} \quad \textit{при любых } \lambda > 0, \mathbf{X} \in \operatorname{int} R_+^m,\ i,j = 1,...,m$$

и справедлив закон Хикса, т.е. для любого вектора $\mathbf{Z} = (Z_1,...,Z_m) \neq 0$ такого, что $\mathbf{P}(\mathbf{X})\mathbf{X} = 0$ справедливо неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial P_i(\mathbf{X})}{\partial Z_j} Z_i Z_j < 0;$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1. *если обратные функции спроса* $\mathbf{P}(\mathbf{X})$ *удовлетворяют гипотезе о рациональном поведении, то для любого дифференцируемого двумерного многообразия* D *из* $\operatorname{int} R_+^m$ *с кусочно гладкой границей* ∂D *справедливо равенство*

$$\oint_{\partial D} \left[\frac{1}{\mathbf{P}(\mathbf{X})\mathbf{X}} \sum_{i=1}^{m} P_i(\mathbf{X}) dX_i \right] = 0;$$

2. *если обратные функции спроса* $\mathbf{P}(\mathbf{X})$ *не удовлетворяют условию интегрируемости Фробениуса в точке* $\hat{\mathbf{X}} \in \operatorname{int} R_+^m$*, то любой окрестности этой точки существует дифференцируемое двумерное многообразие* D *с кусочно гладкой границей* ∂D*, такое что*

$$\oint_{\partial D} \left[\frac{1}{\mathbf{P}(\mathbf{X})\mathbf{X}} \sum_{i=1}^{m} P_i(\mathbf{X}) dX_i \right] > 0. \qquad (2.14)$$

Доказательство. Если обратные функции спроса $\mathbf{P}(\mathbf{X})$ удовлетворяют гипотезе о рациональном поведении, то существуют (см. [10]) дифференцируемые функции $F(\mathbf{X})$ и $q(\mathbf{p})$, такие что

$$q(\mathbf{P}(\mathbf{X}))dF(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{m} P_i(\mathbf{X})dX_i, \; q(\mathbf{P}(\mathbf{X}))F(\mathbf{X}) = \mathbf{P}(\mathbf{X})\mathbf{X}.$$

Тогда

$$\oint_{\partial D}\left[\frac{1}{\mathbf{P}(\mathbf{X})\mathbf{X}}\sum_{i=1}^{m} P_i(\mathbf{X})dX_i\right] = \oint_{\partial D}\left[\frac{dF(\mathbf{X})}{F(\mathbf{X})}\right] = 0.$$

Если обратные функции спроса $\mathbf{P}(\mathbf{X})$ не удовлетворяют условию интегрируемости Фробениуса в точке $\hat{\mathbf{X}} \in \operatorname{int} R_+^m$, то по теореме де Вилле в любой ее окрестности существует (см. [10]) замкнутая кривая $\{\mathbf{Z}(t) | 0 \le t \le 1\}$, являющаяся границей некоторого дифференцируемого двумерного многообразия D, такая что

$$\sum_{i=1}^{m} P_i(\mathbf{Z}(t))\frac{dZ_i(t)}{dt} > 0$$

при всех $t \in [0,1]$, кроме, быть может, двух точек. Откуда следует (2.14). Предложение 3 доказано.

Из предложения 3 следует, что в качестве меры нерациональности потребительского поведения можно использовать следующий показатель

$$\mu = \underbrace{\max}_{D}\left(\exp\left\{\frac{1}{S(D)}\oint_{\partial D}\left[\frac{1}{\mathbf{P}(\mathbf{X})\mathbf{X}}\sum_{i=1}^{m} P_i(\mathbf{X})dX_i\right]\right\}\right), \qquad (2.15)$$

где $S(D)$ площадь поверхности D. Обратные функции спроса удовлетворяют гипотезе о рациональном поведении тогда и только тогда, когда $\mu = 1$. Если обратные функции спроса не удовлетворяют гипотезе о рациональном поведении, то $\mu > 1$.

Рассмотрим кососимметрическую $(m \times m)$ матрицу $B(\mathbf{X}) = \left\| b_{ij}(\mathbf{X}) \right\|$, элементы которой определяются по формуле

$$b_{ij}(\mathbf{X}) = \frac{\partial}{\partial X_j}\left(\frac{P_i(\mathbf{X})}{\mathbf{P}(\mathbf{X})\mathbf{X}}\right) - \frac{\partial}{\partial X_i}\left(\frac{P_j(\mathbf{X})}{\mathbf{P}(\mathbf{X})\mathbf{X}}\right).$$

Заметим, что если обратные функции спроса $\mathbf{P}(\mathbf{X})$ удовлетворяют гипотезе о рациональном поведении, то $B(\mathbf{X}) = 0$. Матрица $B^T(\mathbf{X})B(\mathbf{X})$ является неотрицательно определенной матрицей, и поэтому все ее собственные числа неотрицательны. Обозначим наибольшее из них через $\nu(\mathbf{X})$.

Предложение 4. *Пусть* U *область из* R_+^m, $\mathbf{P}(\mathbf{X})$ *неотрицательная, непрерывно дифференцируемая вектор функции на* R_+^m, *такая что* $\mathbf{P}(\mathbf{X})\mathbf{X} > 0$ *при любых* $\mathbf{X} \in R_+^m \setminus \{0\}$, *выполняются условия отделимости и закон Хикса. Тогда*

$$\underbrace{\max}_{D \subset U}\left[\exp\left(\frac{1}{S(D)}\oint_{\partial D}\left[\frac{1}{\mathbf{P}(\mathbf{X})\mathbf{X}}\sum_{i=1}^{m} P_i(\mathbf{X})dX_i\right]\right)\right] = \underbrace{\max}_{X \in U}\left(\exp(\nu(\mathbf{X}))\right). \qquad (2.16)$$

Доказательство. По формуле Стокса имеем, что

$$\oint_{\partial D}\left[\frac{1}{\mathbf{P}(\mathbf{X})\mathbf{X}}\sum_{i=1}^{m} P_i(\mathbf{X})dX_i\right] = \frac{1}{2}\int_{D}\left(\sum_{i,j=1}^{m} b_{ij}(\mathbf{X})dX_i \wedge dX_j\right). \qquad (2.17)$$

Максимальное значение, принимаемое дифференциальной формой

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} b_{ij}(\mathbf{X})dX_i \wedge dX_j$$

на парах ортонормированных векторов равно $\nu(\mathbf{X})$. Поэтому справедливо соотношение

$$\underbrace{\max}_{D\subset U}\left(\frac{1}{2S(D)}\int_D\left(\sum_{i,j=1}^{m} b_{ij}(\mathbf{X})dX_i\wedge dX_j\right)\right)=\underbrace{\max}_{X\in U}\left(\nu(\mathbf{X})\right). \qquad (2.18)$$

Из (2.17) и (2.18) следует (2.16). Предложение 4 доказано.

Из предложения 4 получается другое выражение для меры нерациональности потребительского поведения $\mu=\underbrace{\max}_{X\in \operatorname{int} R_+^m}\left(\nu(\mathbf{X})\right)$.

3. Обобщение непараметрического метода на случай торговой статистики, не удовлетворяющей гипотезе рационального поведения

Исходной информацией для вычисления экономических индексов и анализа потребительского спроса, как правило, служит торговая статистика, т.е. временные ряды цен и объемов покупок $\left\{\mathbf{P}^t,\mathbf{X}^t\right\}_{t=0}^T$. Таким образом, обратные функции спроса бывают известны лишь в конечном числе точек $\left\{\mathbf{X}^t\right\}_{t=0}^T$. Рациональность потребительского поведения понимается как возможность продолжить торговую статистику до функций спроса, удовлетворяющих гипотезе о рациональности поведения. В основе непараметрического метода лежит следующий аналог предложения 1.

Теорема Африата – Вериана (см. [3]). Следующие утверждения эквивалентны:

1. торговая статистика $\left\{\mathbf{P}^t,\mathbf{X}^t\right\}_{t=0}^T$ удовлетворяет гипотезе о рациональном поведении;
2. торговая статистика $\left\{\mathbf{P}^t,\mathbf{X}^t\right\}_{t=0}^T$ удовлетворяет ОСА, т.е. для любого упорядоченного набора $\{t(1),...,t(k)\}\subset\{0,...,T\}$ справедливо неравенство
$$\left(\mathbf{P}^{t(1)}\mathbf{X}^{t(2)}\right)\left(\mathbf{P}^{t(2)}\mathbf{X}^{t(3)}\right)...\left(\mathbf{P}^{t(k)}\mathbf{X}^{t(1)}\right)\geq\left(\mathbf{P}^{t(1)}\mathbf{X}^{t(1)}\right)\left(\mathbf{P}^{t(2)}\mathbf{X}^{t(2)}\right)...\left(\mathbf{P}^{t(k)}\mathbf{X}^{t(k)}\right); \qquad (3.1)$$
3. существует решение $(\lambda_0,...,\lambda_T)>0$ системы линейных неравенств
$$\lambda_\tau\left(\mathbf{P}^\tau\mathbf{X}^t\right)\geq\lambda_t\left(\mathbf{P}^t\mathbf{X}^t\right),\qquad \tau,t=0,...,T. \qquad (3.2)$$

По положительному решению системы (3.2) строятся временные ряды индексов цен $\left\{\frac{1}{\lambda_t}\right\}_{t=o}^T$ и индексов потребления $\left\{\lambda_t\mathbf{P}^t\mathbf{X}^t\right\}_{t=0}^T$, которые учитывают изменения структуры потребления (см. [12]). Кроме того, при выполнении гипотезы о рациональном поведении может быть поставлена и решена задача о прогнозировании по вектору $\mathbf{P}$ вектора объемов покупок, удовлетворяющего вместе с наблюдавшейся торговой статистикой гипотезе о рациональном поведении (см. [4]). Решение этих задач осуществляется с помощью эффективного вычислительного алгоритма Варшала – Флойда, который имеет полиномиальную сложность. Однако при использовании многоступенчатых схем вычисления экономических индексов (см. [4]), а также вследствие неточности исходной информации торговая статистика может не удовлетворять ОСА и, тем самым, гипотезе о рациональности поведения. В этом случае стандартный непараметрический метод оказывается не применим, хотя возможно, что небольшое изменение торговой статистики приводит к выполнению ОСА и применимости метода.

В [5,6] было разработано обобщение непараметрического метода, применимое при нарушении гипотезы о рациональном поведении, и предложен показатель, характеризующий степень нарушения ОСА. Вводится параметр $\omega \geq 1$, с помощью которого модифицируется система линейных неравенств (3.2):

$$\omega\lambda_\tau\left(\mathbf{P}^\tau\mathbf{X}^t\right) \geq \lambda_t\left(\mathbf{P}^t\mathbf{X}^t\right), \qquad \tau, t = 0,...,T. \tag{3.3}$$

Обозначим через $\hat{\mu}$ минимальное значение ω, при котором система линейных неравенств (3.3) имеет положительные решения. Величину $\hat{\mu}$ можно рассматривать как меру нарушения торговой статистикой гипотезы о рациональности поведения.

Введем обозначение $c_{\tau t} = \dfrac{\mathbf{P}^t\mathbf{X}^t}{\mathbf{P}^\tau\mathbf{X}^t}$. Матрица $C = \|c_{\tau t}\|$ называется матрицей индексов цен Пааше. Преобразуем систему (3.2) к виду

$$\lambda_\tau \geq \max_t c_{\tau t}\lambda_t. \tag{3.4}$$

Неравенство (3.1) принимает вид

$$c_{t(1)t(2)}c_{t(2)t(3)}...c_{t(k)t(1)} \leq 1. \tag{3.5}$$

Рассмотрим идемпотентное полукольцо R_+^m с операциями $a \oplus b = \max(a,b), a \otimes b = ab$ и будем интерпретировать матрицу C как матрицу эндоморфизма полумодуля над идемпотентным полукольцом с такими операциями (см. [13,14]). Существование положительного решения системы (3.3) можно интерпретировать как идемпотентный аналог свойства продуктивности матрицы C (см. [15]). Тогда эквивалентность утверждений 2 и 3 из теоремы Африата – Вериана интерпретируется как идемпотентный аналог известного критерия продуктивности (см. [15]) в терминах сходимости ряда

$$C \oplus C^2 \oplus ... \oplus C^k \oplus ..., \tag{3.6}$$

где степени матрицы понимаются в смысле идемпотентных операций. Заметим, что алгоритм Варшала – Флойда заключается в вычислении идемпотентной суммы ряда (3.6).

Предложение 5. *Пусть элементы матрицы* C *положительны. Тогда система уравнений*

$$\max_t c_{\tau t}\lambda_t = \rho\lambda_\tau, \qquad (\tau = 0,...,T) \tag{3.7}$$

имеет решение $(\lambda_0,...,\lambda_T) > 0$ *только при* $\rho = \hat{\mu}$.

Доказательство. Из положительности элементов матрицы C следует ее неразложимость в идемпотентном смысле. В [14] доказано, что имеет решение, причем при единственном значении ρ. Из теоремы о сходимости алгоритма Варшала – Флойда следует (см. [16]), что система линейных неравенств (3.3) имеет положительное решение тогда и только тогда, когда для любого упорядоченного набора $\{t(1),...,t(k)\} \subset \{0,...,T\}$ справедливо неравенство

$$c_{t(1)t(2)}c_{t(2)t(3)}...c_{t(k)t(1)} \leq (\omega)^k.$$

Обозначим через $\varphi(T+1)$ наибольшее общее кратное всех натуральных чисел от 1 до $T+1$. Тогда для величины $\hat{\mu}$ справедливо выражение

$$(\hat{\mu})^{\varphi(T+1)} = \max_{\{t(1),...,t(k)\} \subset \{0,...,T\}} \left(c_{t(1)t(2)}c_{t(2)t(3)}...c_{t(k)t(1)}\right)^{\frac{\varphi(T+1)}{k}}, \tag{3.8}$$

которое совпадает с выражением (см. [14]) для значения ρ, при котором система уравнений (3.7) имеет положительное решение. Предложение 5 доказано.

Таким образом, величина $\hat{\mu}$ является идемпотентным аналогом числа Фробениуса – Перрона матрицы индексов цен Пааше C, а условие $\hat{\mu} \le 1$ существования положительного решения системы (3.2) можно интерпретировать как идемпотентный аналог соответствующего утверждения из теоремы Фробениуса – Перрона (см. [15]). С увеличением ω множество решений системы (3.3) расширяется. При $\omega = \hat{\mu}$ имеется единственное положительное решение системы (3.3), которое соответствует идемпотентному аналогу вектора Фробениуса – Перрона (см. [14]).

Обсудим теперь связь между величиной $\hat{\mu}$ и показателями нерациональности поведения, введенными в предыдущем разделе.

Пусть $\mathbf{X}^{\mathrm{t}} \in \mathrm{R}_{+}^{\mathrm{m}}, (\mathrm{t} = 0,...,\mathrm{T})$, $\mathbf{P}(\mathbf{X})$ неотрицательная, непрерывно дифференцируемая вектор функция на $\mathrm{R}_{+}^{\mathrm{m}}$, такая что $\mathbf{P}(\mathbf{X})\mathbf{X} > 0$ при любых $\mathbf{X} \in \mathrm{R}_{+}^{\mathrm{m}} \setminus \{0\}$, $\mathbf{P}^{\mathrm{t}} = \mathbf{P}(\mathbf{X}^{\mathrm{t}}), (\mathrm{t} = 0,...,\mathrm{T})$, выполняются условия отделимости и закон Хикса. Обозначим через $\mu(\mathbf{X}^{0},...,\mathbf{X}^{\mathrm{T}})$ величину $\hat{\mu}$, соответствующую торговой статистике $\left\{\mathbf{P}^{\mathrm{t}}, \mathbf{X}^{\mathrm{t}}\right\}_{\mathrm{t}=0}^{\mathrm{T}}$.

Предложение 6. *Пусть набор* $\{\mathrm{t}(1),...,\mathrm{t}(\mathrm{k})\} \subset \{0,...,\mathrm{T}\}$, $\Gamma(\mathrm{t}(1),...,\mathrm{t}(\mathrm{k})) = \bigcup_{\mathrm{a}=1}^{\mathrm{k}} \Delta_{\mathrm{a}}$, *где* $\Delta_{\mathrm{a}} = \left\{\mathbf{Z}(\theta) = \theta\mathbf{X}^{\mathrm{t}(\mathrm{a})} + (1-\theta)\mathbf{X}^{\mathrm{t}(\mathrm{a})-1} \middle| \theta \in [0,1]\right\}$ *и* $\mathbf{X}^{\mathrm{t}(-1)} = \mathbf{X}^{\mathrm{t}(\mathrm{k})}$. *Справедлива оценка*

$$\mu(\mathbf{X}^{0},...,\mathbf{X}^{\mathrm{T}}) \ge \underbrace{\max}_{\{\mathrm{t}(1),...,\mathrm{t}(\mathrm{k})\} \subset \{0,...,\mathrm{T}\}} \exp\left(\frac{1}{\mathrm{k}} \oint_{\Gamma(\mathrm{t}(1),...,\mathrm{t}(\mathrm{k}))} \frac{1}{\mathbf{P}(\mathbf{X})\mathbf{X}} \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}} \mathrm{P}_{\mathrm{i}}(\mathbf{X})\mathrm{dX}_{\mathrm{i}}\right). \qquad (3.9)$$

Доказательство. В силу (3.8) существует набор $\{\mathrm{t}(1),...,\mathrm{t}(\mathrm{k})\} \subset \{0,...,\mathrm{T}\}$, такой что

$$\mu(\mathbf{X}^{0},...,\mathbf{X}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{k}} = \frac{\left(\mathbf{P}^{\mathrm{t}(1)}\mathbf{X}^{\mathrm{t}(1)}\right)}{\left(\mathbf{P}^{\mathrm{t}(1)}\mathbf{X}^{\mathrm{t}(\mathrm{k})}\right)} \frac{\left(\mathbf{P}^{\mathrm{t}(2)}\mathbf{X}^{\mathrm{t}(2)}\right)}{\left(\mathbf{P}^{\mathrm{t}(2)}\mathbf{X}^{\mathrm{t}(1)}\right)} \cdots \frac{\left(\mathbf{P}^{\mathrm{t}(\mathrm{k})}\mathbf{X}^{\mathrm{t}(\mathrm{k})}\right)}{\left(\mathbf{P}^{\mathrm{t}(\mathrm{k})}\mathbf{X}^{\mathrm{t}(\mathrm{k}-1)}\right)}. \qquad (3.10)$$

Из условий отделимости и закона Хикса следует справедливость однородной слабой аксиомы теории выявленного предпочтения: для любых $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathrm{R}_{+}^{\mathrm{m}}$ справедливо неравенство $(\mathbf{P}(\mathbf{Y})\mathbf{X})(\mathbf{P}(\mathbf{X})\mathbf{Y}) \ge (\mathbf{P}(\mathbf{X})\mathbf{X})(\mathbf{P}(\mathbf{Y})\mathbf{Y})$. Откуда следует, что

$$\frac{\mathbf{P}(\mathbf{Y})\mathbf{X}}{\mathbf{P}(\mathbf{Y})\mathbf{Y}} + \frac{\mathbf{P}(\mathbf{X})\mathbf{Y}}{\mathbf{P}(\mathbf{X})\mathbf{X}} \ge 2, \qquad \left(\frac{\mathbf{P}(\mathbf{Y})}{\mathbf{P}(\mathbf{Y})\mathbf{Y}} - \frac{\mathbf{P}(\mathbf{X})}{\mathbf{P}(\mathbf{X})\mathbf{X}}, \mathbf{Y} - \mathbf{X}\right) \le 0. \qquad (3.11)$$

Пусть $\mathbf{Z}_{\mathrm{a}}(\theta) = \mathbf{X}^{\mathrm{t}(\mathrm{a}-1)} + \theta(\mathbf{X}^{\mathrm{t}(\mathrm{a})} - \mathbf{X}^{\mathrm{t}(\mathrm{a}-1)})$. Тогда с помощью (3.11) получаем, что

$$-\int_{\Delta_{\mathrm{a}}} \frac{1}{\mathbf{P}(\mathbf{X})\mathbf{X}} \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}} \mathrm{P}_{\mathrm{i}}(\mathbf{X})\mathrm{dX}_{\mathrm{i}} = \int_{0}^{1} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{Z}_{\mathrm{a}}(\theta))(\mathbf{X}^{\mathrm{t}(\mathrm{a}-1)} - \mathbf{X}^{\mathrm{t}(\mathrm{a})})}{\mathbf{P}(\mathbf{Z}_{\mathrm{a}}(\theta))\mathbf{Z}_{\mathrm{a}}(\theta)} \mathrm{d}\theta \ge \frac{\mathbf{P}(\mathbf{X}^{\mathrm{t}(\mathrm{a})})(\mathbf{X}^{\mathrm{t}(\mathrm{a}-1)} - \mathbf{X}^{\mathrm{t}(\mathrm{a})})}{\mathbf{P}(\mathbf{X}^{\mathrm{t}(\mathrm{a})})\mathbf{X}^{\mathrm{t}(\mathrm{a})}}. \qquad (3.12)$$

Используя очевидное неравенство $\frac{1}{1+\mathrm{x}} \ge \exp(-\mathrm{x})$ при $\mathrm{x} \ge -1$, получаем из (3.12), что

$$\frac{\mathbf{P}(\mathbf{X}^{\mathrm{t}(\mathrm{a})})\mathbf{X}^{\mathrm{t}(\mathrm{a})}}{\mathbf{P}(\mathbf{X}^{\mathrm{t}(\mathrm{a})})\mathbf{X}^{\mathrm{t}(\mathrm{a}-1)}} \ge \exp\left(\int_{\Delta_{\mathrm{a}}} \frac{1}{\mathbf{P}(\mathbf{X})\mathbf{X}} \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}} \mathrm{P}_{\mathrm{i}}(\mathbf{X})\mathrm{dX}_{\mathrm{i}}\right). \qquad (3.13)$$

Из (3.10) и (3.13) имеем (3.9). Предложение 6 доказано.

Итак, если торговая статистика не удовлетворяет ОСА и, следовательно, стандартный непараметрический метод оказывается неприменимым, то можно предложить следующее его обобщение. Вместо системы линейных неравенств (3.2), не имеющей положительных решений, предлагается определять индексы цен из решения модифицированной системы (3.3), которая имеет положительные

решения при значениях параметра ω, превышающих показатель $\hat{\mu}$ нарушения торговой статистикой гипотезы о рациональности поведения. Из множества всех положительных решений системы (3.3) алгоритм Варшала – Флойда выбирает конкретное решение, которое, вообще говоря, изменяется при изменении параметра ω. Среди множества положительных решений системы (3.3) имеется одно выделенное решение, которое удовлетворяет (3.3) при всех $\omega \geq \hat{\mu}$, является идемпотентным аналогом вектора Фробениуса – Перрона и которое было бы естественно использовать при вычислении экономических индексов. Это решение можно найти из (3.3), если положить $\omega = \hat{\mu}$. При использовании многоступенчатых схем вычисления экономических индексов удобно установить значение ω одним для всех рассматриваемых подгрупп номенклатуры товаров. Однако значения показателя $\hat{\mu}$ для различных подгрупп оказывается разным. Интересно изучить насколько изменяются решения, получаемые алгоритмом Варшала – Флойда, при изменении ω. Для исследования этого вопроса естественно обратиться к численным экспериментам.

4. Анализ структуры потребительского спроса с помощью обобщенного непараметрического метода

Непараметрический метод вычисления экономических индексов применялся в [6] для голландской статистики [17] с номенклатурой товаров, состоящей из 106 наименований. Эта статистика представляет собой временные ряды объемов покупок и соответствующих цен для населения страны по всей совокупности потребительских благ за 27 лет. Численные расчеты показали, что общая функция полезности существует и в номенклатуре товаров выделяются группы, для которых существуют экономические индексы. Однако применить многоступенчатые схемы вычисления (см. [12]) и построить дерево экономических индексов не удается. Для этих целей естественно обратиться к обобщенному непараметрическому методу.

Численные эксперименты показали, что индекс цен, рассчитанный с помощью алгоритма Варшала – Флойда практически не зависит от величины ω (см. рис.1). Поэтому обобщенный непараметрический метод можно эффективно использовать для исследования сегментации рынка потребительских товаров и услуг.

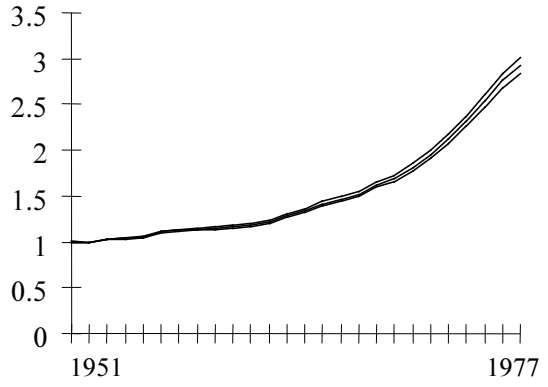

Рис. 1. Индекс для группы «Все товары и услуги», вычисленный при ω = 1; 1.003; 1.01

При значении $\omega = 1$, соответствующем стандартному непараметрическому методу не удается выделить ни одного сегмента на этом рынке. При $\omega = 1.003$

удается выделить 12 вершин (сегментов потребительского рынка), расположенных на 5 уровнях дерева экономических индексов. Однако при этом значении ω выделяется лишь 2 из 5 групп товаров, изначально выделенных в голландской статистике и соответствующих представлениям о сегментации потребительского рынка, укоренившихся в языке. При $\omega = 1.01$ выделяется 14 вершин, расположенных по-прежнему на 5 уровнях, причем среди соответствующих сегментов рынка содержатся 4 из 5 групп товаров, изначально выделенных в голландской статистике. Более подробно результаты использования обобщенного непараметрического метода для анализа сегментации голландского рынка потребительских товаров и услуг представлены в [18].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Afriat S.N.* The construction of utility functions from expenditure data. // International economic review, 1967, N7, p.67-77.
2. *Varian H.* The nonparametric approach to demand analysis.// Econometrica, 1982, v. 50, N4, p.945-973.
3. *Varian H.* Non-parametric tests of consumer behavior. // The review of economic studies, 1983, v. L(1), N160 (1), p.99-100.
4. *Шананин А.А.* Непараметрические методы анализа структуры потребительского спроса. // Математическое моделирование, 1993, т.5, N9, с. 3-17.
5. *Afriat S.N* On a system of inequalities in demand analysis and extension of the classical method. // International economic review, 1973, v. 14, N2, p.460-472.
6. *Houtman M.* Nonparametric consumer and producer analysis. // Dissertation no 95-32, 1995, University of Limburg, Maastricht, the Netherlands.
7. *Ашманов С.А.* Введение в математическую экономику. // М.: Наука, 1984, 294 с.
8. *Levin V.L.* A superlinear multifunction arising in connection with mass transfer problems. // Set-Valued Analysis, 1996, N4, p. 41-65.
9. *Levin V.L.* Reduced cost functions and their applications. // Journal of Math. Econ., 1997, v.28.
10. *Шананин А.А.* Агрегирование конечных продуктов и проблема интегрируемости функций спроса. // М.: ВЦ АН СССР, 1986, 66 с.
11. *Strotz R.H.* The utility tree – a correction and further appraisal. // Econometrica, 1959, v.27, N3, p.482-488.
12. *Вратенков С.Д., Шананин А.А.* Анализ структуры потребительского спроса с помощью экономических индексов. // М.: ВЦ АН СССР, 1991, 62с.
13. *Маслов В.П., Колокольцов В.Н.* Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении. // М.: Наука, 1994, 144 с.
14. Дудников П.И., Самборский С.Н. Эндоморфизмы полумодуля над полукольцом с идемпотентной операцией. // Киев: ИМ АН УССР, 1987, N87, 48с.
15. *Никайдо Х.* Выпуклые структуры и математическая экономика. // М.: Мир, 1972, 518 с.
16. *Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И.* Лекции по теории графов. // М.: Наука, 1990, 384 с.
17. Private Consumption Expenditure and Price Index Numbers for Netherlands 1951-1977. //Netherlands Bureau of Statistics, 1981.
18. *Поспелова Л. Я., Шананин А.А.* Анализ торговой статистики Нидерландов 1951-1977гг. с помощью обобщенного непараметрического метода.// М.: ВЦ РАН, 1998 (в печати).