УДК 519.86

Использование вариационных неравенств для доказательства существования конкурентного равновесия

Шананин А.А.[1]
(Москва)

The proof of existence of market equilibrium by means of variational inequality

Shananin A.A.

Доказана теорема двойственности для задач обобщенного программирования в банаховых пространствах. Предложено доказательство существования конкурентного равновесия в модели Эрроу - Дебре, которое основано на анализе вариационного неравенства. Вопрос о существовании конкурентного равновесия в модели с транзакционными издержками сведен к вопросу о существовании решения вариационного неравенства.

The duality theorem for generalized programming problems in Banach spaces is proved. The proof of existence of market equilibrium in Arrow - Debreu model is proposed. This prove based on the analyses of variational inequalities. The problem of existence of market equilibrium in the model with transaction costs reduced to the problem of existence of variational inequality.

1. Введение. В математической экономике существуют два подхода к моделированию структуры цен. С одной стороны, в задачах оптимизации, в которых ограничениями являются балансовые соотношения, описывающие производственные возможности экономической системы, принято интерпретировать множители Лагранжа как цены. В случае линейных оптимизационных моделей межотраслевого баланса цены определяются из решения двойственной задачи линейного программирования. Теорема двойственности Фенхеля (см., например [1, с.46]) позволяет распространить этот подход на случай балансовых моделей с вогнутыми производственными функциями. С другой стороны, в моделях экономического равновесия цены определяются из условия равновесия спроса и предложения. В [2] были предложены вариационные принципы для моделей экономического равновесия и схема построения двойственных задач для определения равновесных цен. Эти принципы формулируются в форме вариационных неравенств. Если функции суммарного потребительского удовлетворяют условиям интегрируемости Фробениуса и закону Хикса [3, с.61], то вариационные принципы вырождаются в обычную пару двойственных задач оптимизации, соответствующих первому подходу к моделированию структуры цен. В данной работе вариационные неравенства используются для доказательства существования конкурентного равновесия.

2. Двойственность для задач обобщенного программирования. Пусть E банахово пространство, E^* сопряженное к нему банахово пространство. T выпуклое подмножество E и

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 99-01-01238 и 96-15-96207).

$\varphi(x)$ многозначное отображение, действующее из E в E^*, такое что при любом $x \in T$ множество $\varphi(x)$ является конусом. Пару $(T, \varphi(x))$ будем называть задачей обобщенного программирования (ЗОП).

Определение. *Будем говорить, что вектор* $\hat{x}$ *является решением ЗОП* $(T, \varphi(x))$, *если* $\hat{x} \in T$ *и существует такой ненулевой вектор* $\hat{p} \in \varphi(\hat{x})$, *что при любых* $y \in T$ *выполняется неравенство* $\hat{p}\hat{x} \geq \hat{p}y$. *Будем при этом также говорить, что вектор* $\hat{p}$ *соответствует решению* $\hat{x}$ *ЗОП.*

Введенная ЗОП и ее решение являются частным случаем класса задач, известного как вариационные неравенства, и понятия решения вариационного неравенства (см., например, [1] с.157).

Обозначим через $T^0 = \{p \in E^* | px \leq 1 \ \forall x \in T\}$ поляру множества $T \subseteq E$, через $W(p,T) = \sup\limits_{x \in T} px$ опорную функцию множества T, через ${}^0A = \{x \in E | px \leq 1 \forall p \in A\}$ поляру множества $A \subseteq E^*$, через $\varphi^{-1}(p) = \{x | p \in \varphi(x)\}$ многозначное отображение обратное к отображению $\varphi(x)$.

Определение. *Будем называть пару* $(T^0, \varphi^{-1}(p))$ *двойственным вариационным неравенством (ДВН) к ЗОП* $(T, \varphi(x))$. *Вектор* $\hat{p}$ *называется решением ДВН, если* $\hat{p} \in T^0 \setminus \{0\}$ *и существует вектор* $\hat{x} \in \varphi^{-1}(\hat{p})$, *такой что* $\hat{p}\hat{x} \geq q\hat{x}$ *для любого* $q \in T^0$. *Будем при этом говорить, что вектор* $\hat{x}$ *соответствует решению* $\hat{p}$ *ДВН* $(T^0, \varphi^{-1}(p))$.

Лемма. *Пусть* T *выпуклое замкнутое множество из банахова пространства* E, *содержащее* 0. *Тогда* ${}^0(T^0) = T$.

Доказательство. Очевидно, что $T \subseteq {}^0(T^0)$. Допустим противное, что $T \neq {}^0(T^0)$. Тогда существует $z \in {}^0(T^0) \setminus T$. Поскольку T выпуклое, замкнутое множество и $z \notin T$, по теореме о строгой отделимости (см.) существует $p \in E^*$, такой что

$$\sup_{x \in T} px < pz. \tag{2.1}$$

Так как $0 \in T$, из (2.1) следует, что $pz > 0$. Тогда существует $\lambda > 0$, такое что

$$\sup_{x \in T} px < \frac{1}{\lambda} < pz.$$

Следовательно, $\lambda p \in T^0$ и $\lambda pz > 1$. Откуда имеем, что $z \notin {}^0(T^0)$. Противоречие. Лемма доказана.

Теорема двойственности. *Пусть* T *выпуклое замкнутое множество из банахова пространства* E, *содержащее* 0. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Пусть вектор* $\hat{x}$ *является решением ЗОП* $(T,\varphi(x))$ *и вектор* $\hat{p}$ *ему соответствует. Если* $\hat{p}\hat{x}>0$, *то вектор* $\frac{1}{\hat{p}\hat{x}}\hat{p}$ *является решением ДВН* $(T^0,\varphi^{-1}(p))$ *и вектор* $\hat{x}$ *ему соответствует.*
2. *Пусть вектор* $\hat{p}$ *является решением ДВН* $(T^0,\varphi^{-1}(p))$ *и вектор* $\hat{x}$ *ему соответствует. Если* $\hat{p}\hat{x}>0$, *то вектор* $\frac{1}{\hat{p}\hat{x}}\hat{x}$ *является решением ЗОП* $(T,\varphi(x))$ *и вектор* $\hat{p}$ *ему соответствует.*

Доказательство. Если вектор $\hat{x}$ является решением ЗОП $(T,\varphi(x))$и вектор $\hat{p}$ ему соответствует, то $\hat{x}\in T$, $\hat{p}\in\varphi(\hat{x})$ и при любых $y\in T$ выполняется неравенство $\hat{p}\hat{x}\geq\hat{p}y$. Откуда в силу условия $\hat{p}\hat{x}>0$ следует, что $\frac{1}{\hat{p}\hat{x}}\hat{p}y\leq 1$ для любых $y\in T$, т.е. $\frac{1}{\hat{p}\hat{x}}\hat{p}\in T^0$. Поскольку $\varphi(\hat{x})$ конус, из $\hat{p}\in\varphi(\hat{x})$ имеем, что $\hat{x}\in\varphi^{-1}\left(\frac{1}{\hat{p}\hat{x}}\hat{p}\right)$. Поскольку T выпуклое замкнутое множество, содержащее 0, справедливо равенство ${}^0\!\left(T^0\right)=T$. Следовательно, $\hat{x}\in{}^0\!\left(T^0\right)$, т.е. $q\hat{x}\leq 1=\frac{1}{\hat{p}\hat{x}}\hat{p}\hat{x}$ для любого $q\in T^0$. Таким образом, по определению вектор $\frac{1}{\hat{p}\hat{x}}\hat{p}$ является решением ДВН $(T^0,\varphi^{-1}(p))$ и вектор $\hat{x}$ ему соответствует.

Докажем теперь утверждение 2. Если вектор $\hat{p}$ является решением ДВН $(T^0,\varphi^{-1}(p))$ и вектор $\hat{x}$ ему соответствует, то $\hat{p}\in T^0$, $\hat{x}\in\varphi^{-1}(\hat{p})$ и

$$\hat{p}\hat{x}\geq q\hat{x}\ \text{для любого}\ q\in T^0. \tag{2.2}$$

Тогда $\hat{p}\in\varphi(\hat{x})$ и $0<\hat{p}\hat{x}\leq W(\hat{p},T)\leq 1$. Если допустить, что $0<W(\hat{p},T)<1$, то $\frac{1}{W(\hat{p},T)}\hat{p}\in T^0$ и $\frac{1}{W(\hat{p},T)}\hat{p}\hat{x}>\hat{p}\hat{x}$, что противоречит (2.2). Следовательно, $W(\hat{p},T)=1$ и из (1) получаем, что $\frac{1}{\hat{p}\hat{x}}\hat{x}\in{}^0\!\left(T^0\right)=T$. Из $\hat{p}\in T^0$ имеем, что $\hat{p}x\leq 1=\frac{1}{\hat{p}\hat{x}}\hat{p}\hat{x}$ для любого $x\in T$. Таким образом, по определению вектор $\frac{1}{\hat{p}\hat{x}}\hat{x}$ является решением ЗОП $(T,\varphi(x))$ и вектор $\hat{p}$ ему соответствует. Теорема двойственности доказана.

Заметим, что если $\varphi(\lambda x)=\varphi(x)$ при всех x и $\lambda>0$. Тогда множество $\varphi^{-1}(p)$ оказывается конусом и ДВН $(T^0,\varphi^{-1}(p))$ превращается в ЗОП. Если дополнительно ${}^0\!\left(T^0\right)=T$, то двойственной к ЗОП $(T^0,\varphi^{-1}(p))$ оказывается исходная ЗОП $(T,\varphi(x))$.

3. Вариационные неравенства в модели Эрроу - Дебре. Будем считать, что в экономике выделено m видов товаров, n потребителей и k производителей. Производственные возможности j-го $(j=1,...,k)$ производителя описываются технологическим множеством $D_j \subset R^m$. Будем для простоты предполагать, что D_j $(j=1,...,k)$ являются выпуклыми компактами, содержащими 0. Производители максимизируют прибыль: $\pi_j(p)=\max\limits_{x\in D_j} py$, где y - вектор затрат-выпусков j-го производителя, $p\in R^m_+\setminus\{0\}$ вектор цен на рассматриваемые товары, а $\pi_j(p)$ функция прибыли j-го производителя. Отметим, что $\pi_j(p)\geq 0$ при $p\in R^m_+\setminus\{0\}$. Предложение j -го производителя товаров на рынке задается многозначным отображением $\xi_j(p)=\operatorname{Arg\,max}\{py\,|\,y\in D_j\}$. Суммарное предложение производителей описывается многозначным отображением $\xi(p)=\sum\limits_{j=1}^{k}\xi_j(p)=\operatorname{Arg\,max}\{py\,|\,y\in D\}$, где $D=\sum\limits_{i=1}^{k}D_i$ суммарное технологическое множество производителей.

Предполагается, что i-ый потребитель $(i=1,...,n)$ обладает начальным набором товаров $w_i\in \operatorname{int} R^m_+$ и получает долю $\alpha_{ij}\geq 0$ прибыли j-го производителя, где $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_{ij}=1, (j=1,...,k)$. Потребительские предпочтения i-го потребителя задаются функцией полезности $u_i(x)$, определенной на R^m_+ и являющейся непрерывной, вогнутой, монотонно неубывающей функцией на R^m_+, не имеющей максимумов. Спрос i-го потребителя на рынке описывается многозначным отображением

$$\Phi_i(p)=\operatorname{Arg\,max}\left\{u_i(x)\,\middle|\,x\in R^m_+, px\leq pw_i+\sum_{j=1}^{k}\alpha_{ij}\pi_j(p)\right\}. \qquad (3.1)$$

Совокупный спрос потребителей определяется функцией спроса $\Phi(p)=\sum\limits_{i=1}^{n}\Phi_i(p)$. Очевидно, что $\Phi(\lambda p)=\Phi(p)$ при всех $\lambda>0, p\in R^m_+$.

Совокупное предложение формируется из предложения производителей и начальных запасов потребителей, оно описывается многозначным отображением $\Psi(p)=\xi(p)+\sum_{i=1}^{n} w_i$.

Обозначим $T=D+\sum_{i=1}^{n} w_i$. Очевидно, что T выпуклый компакт.

Вектором равновесных цен называется вектор $\hat{p}\in R_+^m\setminus\{0\}$, такой что $\Phi(\hat{p})\cap\left(\Psi(\hat{p})-R_+^m\right)\neq\varnothing$. Заметим, что если $\hat{x}\in\Phi(\hat{p})\cap\left(\Psi(\hat{p})-R_+^m\right)\neq\varnothing$, то существуют $\hat{x}_i\in\Phi_i(\hat{p})$ $(i=1,...,n)$ и $\hat{y}_j\in\xi_j(\hat{p})$ $(j=1,...,k)$ такие, что

$$\hat{x}=\sum_{i=1}^{n}\hat{x}_i\leq\sum_{j=1}^{k}\hat{y}_j+\sum_{i=1}^{n} w_i .$$

При сделанных предположениях о функциях полезности потребителей $U_i(x)$ из $\hat{x}_i\in\Phi_i(\hat{p})$ следует, что

$$\hat{p}\hat{x}_i=\hat{p}w_i+\sum_{j=1}^{k}\alpha_{ij}\pi_j(\hat{p}). \tag{3.2}$$

Суммируя равенства (3.2) по i, получаем, что

$$\sum_{i=1}^{n}\hat{p}\hat{x}_i=\sum_{i=1}^{n}\hat{p}w_i+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\alpha_{ij}\pi_j(\hat{p})=\sum_{i=1}^{n}\hat{p}w_i+\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}\pi_j(\hat{p})=\sum_{i=1}^{n}\hat{p}w_i+\sum_{j=1}^{k}\pi_j(\hat{p})=\sum_{i=1}^{n}\hat{p}w_i+\sum_{j=1}^{k}\hat{p}\hat{y}_j . \tag{3.3}$$

Таким образом, набор $\{\hat{x}_1,...,\hat{x}_n,\hat{y}_1,...,\hat{y}_k,\hat{p}\}$ является конкурентным равновесием в модели Эрроу - Дебре (см. [4], с. 325).

Обозначим через $\Omega(x)=\{p\in R_+^m\setminus\{0\} \mid x\in\Phi(p)\}$ многозначное отображение, являющееся обратным к отображению спроса $\Phi(p)$.

Предложение 1. *Если* $\hat{x}$ *решение ЗОП* $\left(T-R_+^m,\Omega(x)\right)$ *и вектор* $\hat{p}$ *ему соответствует, то* $\hat{p}$ *является вектором равновесных цен в модели Эрроу - Дебре. Обратно, если* $\hat{p}$ *вектор* *равновесных цен в модели Эрроу - Дебре, то существует решение ЗОП* $\left(T - R^m_+, \Omega(x)\right)$, *которому соответствует* $\hat{p}$.

Доказательство. Пусть $\hat{x}$ решение ЗОП $\left(T - R^m_+, \Omega(x)\right)$ и вектор $\hat{p}$ ему соответствует. Тогда $\hat{p} \in \Omega(\hat{x})$ и, следовательно, $\hat{x} \in \Phi(\hat{p})$. Кроме того, $\hat{x} \in \operatorname{Arg\,max}\left\{\hat{p}y \middle| y \in T - R^m_+\right\}$. Поскольку $\hat{p} \geq 0$, имеем, что $\max\left\{\hat{p}y \middle| y \in T - R^m_+\right\} = \max\left\{\hat{p}y \middle| y \in T\right\}$. Следовательно, $\hat{x} \in \Psi(\hat{p}) - R^m_+$. Таким образом, $\hat{x} \in \Phi(\hat{p}) \cap \left(\Psi(\hat{p}) - R^m_+\right)$ и, значит, $\hat{p}$ является вектором равновесных цен.

Пусть $\hat{p}$ вектор равновесных цен, т.е. $\hat{p} \in R^m_+ \setminus \{0\}$ и существует вектор $\hat{x}$, такой что $\hat{x} \in \Phi(\hat{p}) \cap \left(\Psi(\hat{p}) - R^m_+\right)$. Следовательно, $\hat{p} \in \Omega(\hat{x})$ и существует $\hat{z} \in \Psi(\hat{p})$, такой что $\hat{x} \leq \hat{z}$. Из (3.3) имеем, что $\hat{p}\hat{x} = \hat{p}\hat{z}$. Поскольку $\hat{p} \geq 0$, справедливо соотношение $\hat{z} \in \operatorname{Arg\,max}\left\{\hat{p}y \middle| y \in T - R^m_+\right\}$. Откуда получаем, что $\hat{x} \in \operatorname{Arg\,max}\left\{\hat{p}y \middle| y \in T - R^m_+\right\}$. Следовательно, $\hat{x}$ решение ЗОП $\left(T - R^m_+, \Omega(x)\right)$ и вектор $\hat{p}$ ему соответствует. Предложение 1 доказано.

Следствие 1. *Если* $\hat{p}$ *решение ДВН* $\left(\left(T - R^m_+\right)^0, \Phi(p)\right)$, *то* $\hat{p}$ *является вектором равновесных цен.*

Доказательство. Заметим, что $\left(T - R^m_+\right)^0 \subset R^m_+$. Следовательно, $\hat{p} \in R^m_+ \setminus \{0\}$. Пусть $\hat{x}$ соответствует решению $\hat{p}$ ДВН $\left(\left(T - R^m_+\right)^0, \Phi(p)\right)$. Тогда $\hat{x} \in \Phi(\hat{p})$ и

$$\hat{p}\hat{x} = \sum_{i=1}^{n} \hat{p}w_i + \sum_{j=1}^{k} \pi_j(\hat{p}) > 0,$$

так как $w_i > 0$ $(i = 1,\ldots,n)$ и $\pi_j(\hat{p}) \geq 0$ $(j = 1,\ldots,k)$. По теореме двойственности вектор $\hat{p}$ соответствует решению ЗОП $\left(T - R^m_+, \Omega(x)\right)$ и, значит, в силу предложения 1 является вектором равновесных цен. Следствие 1 доказано.

Следствие 2. *В модели Эрроу - Дебре при сделанных предположениях существует конкурентное равновесие.*

Доказательство. Пусть H параллелепипед в R^m, такой что $w_i \in \operatorname{int} H \ (i = 1,\dots,n)$, $(T - R^m_+) \cap R^m_+ \subset \operatorname{int} H$. Рассмотрим модифицированные функции спроса

$$\widetilde{\Phi}_i(p) = \operatorname{Arg}\max\left\{u_i(x) \,\middle|\, x \in R^m_+ \cap H, px \le pw_i + \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij}\pi_j(p)\right\},$$

определенные на множестве $S = \left\{p = (p_1,\dots,p_m) \in R^m_+ \,\middle|\, \sum_{t=1}^{m} p_t = 1\right\}$. Отображение $\widetilde{\Phi}_i(p)$ является замкнутым отображением (см. [4], с.350) с непустыми, выпуклыми, компактными значениями. Положим $\widetilde{\Phi}(p) = \sum_{i=1}^{k} \widetilde{\Phi}_i(p)$. Заметим, что отображение $\Gamma(p) = \widetilde{\Phi}_1(p) \times \dots \times \widetilde{\Phi}_k(p)$ замкнуто на S (см. [4], с.95). Отображение $\widetilde{\Phi}(p)$ является замкнутым отображением как суперпозиция отображения $\Gamma(p)$ и отображения суммирования (см. [4], с. 102). Поскольку kH компакт и $\widetilde{\Phi}(p) \subset kH$, $\widetilde{\Phi}(\lambda p) = \widetilde{\Phi}(p)$ при любых $p \in S$, $\lambda > 0$, отображение $\widetilde{\Phi}(p)$ является полунепрерывным сверху на множестве $\left\{p = (p_1,\dots,p_m) \in R^m_+ \,\middle|\, \sum_{t=1}^{m} p_t \ge \varepsilon\right\}$ при любом $\varepsilon > 0$. Доопределим $\widetilde{\Phi}(0) = \operatorname{conv}\left(\bigcup_{p \in S} \widetilde{\Phi}(p)\right) \subset R^m_+ \setminus \{0\}$. Тогда отображение $\widetilde{\Phi}(p)$ будет полунепрерывным сверху на R^m_+ с непустыми, выпуклыми, компактными значениями.

Рассмотрим вспомогательное вариационное неравенство $\left((T - R^m_+)^0, \widetilde{\Phi}(p)\right)$. Поскольку $0 \in \operatorname{int}(T - R^m_+)$, множество $(T - R^m_+)^0 \subset R^m_+$ является компактом. Кроме того, существует $\varepsilon > 0$, такое что $\left\{p = (p_1,\dots,p_m) \in R^m_+ \,\middle|\, \sum_{t=1}^{m} p_t \le \varepsilon\right\} \subset (T - R^m_+)^0$. Откуда следует, что 0 не является решением ДВН $\left((T - R^m_+)^0, \widetilde{\Phi}(p)\right)$. Вариационное неравенство $\left((T - R^m_+)^0, \widetilde{\Phi}(p)\right)$ имеет решение $\hat{p}$ (см. [1], с. 158), которому соответствует вектор $\hat{x}$. Поскольку $\hat{x} \in \widetilde{\Phi}(\hat{p}) \subset R^m_+$ и $\hat{x} \in T - R^m_+$, имеем, что $\hat{x} \in \operatorname{int} H$. Откуда следует, что $\hat{x} \in \Phi(\hat{p})$. Поэтому $\hat{p}$ является решением ДВН $\left((T - R^m_+)^0, \Phi(p)\right)$ и в силу следствия 1 вектором равновесных цен. Следствие 2 доказано.

4. Сведение вопроса о существование неклассического конкурентного равновесия к вопросу о существовании решения ЗОП. Рассмотрим обобщение модели Эрроу - Дебре, в котором учитываются транзакционные издержки, связанные с продажей продукции. Будем предполагать, что цены q, по которым производитель реализует продукцию, меньше цен p, которые платит за нее покупатель. Разность цен покупки и продажи составляет прибыль торгового посредника. Будем предполагать, что $q = Ap$, где A неотрицательная диагональная матрица с положительными диагональными элементами меньшими 1. Такое соотношение между ценами возникает, например, если государство вводит налоги на продажи. Аналогичные соотношения получаются также в экономике, функционирующей в условиях высокой инфляции с учетом задержек обращения денег (см. [3], с.189) или в экономике с высокими транзакционными издержками обращения, в которой в расчетах между производителями используются неплатежи и денежные суррогаты (см. [3], глава 5).

Предположим дополнительно, что технологические множества $D_j\,(j = 1,\dots,k)$ производителей являются сильно выпуклыми, т.е. для каждого $j = 1,\dots,k$ существует такое $R_j > 0$, что D_j представляется как пересечение шаров радиуса R_j. Будем обозначать через $(y)_+ = (\tilde{y}_1,\dots,\tilde{y}_m)$ и $(y)_- = (\breve{y}_1,\dots,\breve{y}_m)$ векторы, компоненты которых получаются из компонент вектора $y = (y_1,\dots,y_m)$ по формулам $\tilde{y}_t = \max(0, y_t)$, $\breve{y}_t = \min(0, y_t)$ $t = 1,\dots,m$. Предложение j-го производителя описывается задачей максимизации прибыли с учетом транзакционных потерь на технологическом множестве

$$\overline{\xi}_j(p) = \operatorname{Arg\,max}\left\{pA(y)_+ + p(y)_- \,\middle|\, y \in D_j\right\}. \tag{4.1}$$

При сделанных предположениях относительно D_j функция предложения $\xi_j(p)$ является однозначной непрерывной функцией на $R^m_+ \setminus \{0\}$. Поэтому непрерывными на R^m_+ являются функция прибыли j-го производителя

$$\overline{\pi}_j(p) = \max\left\{pA(y)_+ + p(y)_- \,\middle|\, y \in D_j\right\}$$

и функция доходов торгового посредника от реализации продукции j-го производителя

$$\tilde{\pi}_j(p) = p\left(\xi_j(p)\right)_+ - pA\left(\xi_j(p)\right)_+ .$$

Отметим также, что эти функции принимают неотрицательные значения.

Будем считать, что вся прибыль торговых посредников распределяется между потребителями. Обозначим через $\widetilde{\alpha}_{ij} \geq 0$ долю прибыли торгового посредника, реализующего продукцию j-го производителя, которую получает i-ый потребитель. Тогда $\sum_{i=1}^{n} \widetilde{\alpha}_{ij} = 1 \ \left(j = 1,\ldots,k\right)$. Предположим дополнительно, что функции полезности потребителей $u_i(x) \ \left(i = 1,\ldots,n\right)$ являются строго вогнутыми. Функция спроса i-го потребителя описывается задачей

$$\overline{\Phi}_i(p) = \operatorname{Arg\,max}\left\{u_i(x) \middle| px \leq pw_i + \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} \overline{\pi}_j(p) + \sum_{j=1}^{k} \widetilde{\alpha}_{ij} \widetilde{\pi}_j(p), x \geq 0\right\}$$

и является при сделанных предположениях однозначной непрерывной функцией на $\operatorname{int} R_+^m$.

Будем говорить, что набор $\{\widehat{x}_1,\ldots,\widehat{x}_n,\widehat{y}_1,\ldots,\widehat{y}_k,\widehat{p}\}$ является конкурентным равновесием в модели с транзакционными издержками, если $\widehat{p} \in R_+^m \setminus \{0\}$, $\widehat{x}_i \in \overline{\Phi}_i(\widehat{p}) \ \left(i = 1,\ldots,n\right)$, $\widehat{y}_j = \overline{\xi}_j(\widehat{p}) \ \left(j = 1,\ldots,k\right)$,

$$\sum_{i=1}^{n} \widehat{x}_i \leq \sum_{j=1}^{k} \widehat{y}_j + \sum_{i=1}^{n} w_i ,$$

$$\widehat{p}\left(\sum_{j=1}^{k} \widehat{y}_j + \sum_{i=1}^{n} w_i - \sum_{i=1}^{n} \widehat{x}_i\right) = 0 .$$

Будем при этом называть вектор $\widehat{p}$ вектором равновесных цен в модели с транзакционными издержками.

Сопоставим каждому технологическому множеству D_j подмножество пространства R^{2m} следующего вида $\widetilde{D}_j = \left\{(y,z) \middle| y \in D_j, z = (y)_+ - A(y)_+\right\}$. Множество $\widetilde{D}_j$ является выпуклым компактом, содержащим 0. Каждому вектору начальных запасов w_i сопоставим вектор $\widetilde{w}_i = (w_i, 0) \in R^{2m}$. Положим

$$\widetilde{T}=\left\{(x,z)\middle|\exists(y,z)\in\sum_{j=1}^{k}\widetilde{D}_j+\sum_{i=1}^{n}\widetilde{w}_i : x\le y\right\}.$$

Определим многозначное отображение, сопоставляющее $(x,z)\in R^{2m}$ конус $\widetilde{\Omega}(x,z)=\left\{(p,-p)\in R_+^{2m}\setminus(0)\middle|x\in\sum_{i=1}^{n}\overline{\Phi}_i(p)\right\}$.

Предложение 2. *Если* $(\hat{x},\hat{z})$ *решение ЗОП* $(\widetilde{T},\widetilde{\Omega}(\hat{x},\hat{z}))$ *и вектор* $(\hat{p},-\hat{p})$ *ему соответствует, то* $\hat{p}$ *является вектором равновесных цен в модели с транзакционными издержками. Обратно, если* $\hat{p}$ *вектор равновесных цен в модели с транзакционными издержками, то существует решение ЗОП* $(\widetilde{T},\widetilde{\Omega}(\hat{x},\hat{z}))$, *которому соответствует* $(\hat{p},-\hat{p})$.

Доказательство. Пусть $(\hat{x},\hat{z})$ решение ЗОП $(\widetilde{T},\widetilde{\Omega}(\hat{x},\hat{z}))$ и вектор $(\hat{p},-\hat{p})$ ему соответствует. Тогда $\hat{p}\in R_+^m\setminus\{0\}$ и $\hat{x}\in\sum_{i=1}^{n}\overline{\Phi}_i(\hat{p})$, т.е. существуют $\{\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_n\}$, такие что $\hat{x}=\sum_{i=1}^{n}\hat{x}_i$, $\hat{x}_1\in\overline{\Phi}_1(\hat{p}),\ldots,\hat{x}_n\in\overline{\Phi}_n(\hat{p})$. При сделанных предположениях о функциях полезности имеем, что $\hat{p}\hat{x}_i=\hat{p}w_i+\sum_{j=1}^{k}\alpha_{ij}\overline{\pi}_j(\hat{p})+\sum_{j=1}^{k}\widetilde{\alpha}_{ij}\widetilde{\pi}_j(\hat{p})$. Суммируя эти равенства по i, получаем, что

$$\hat{p}\hat{x}=\sum_{i=1}^{n}\hat{p}\hat{x}_i=\sum_{i=1}^{n}\hat{p}w_i+\sum_{j=1}^{k}\left(\hat{p}A\left(\overline{\xi}_j(\hat{p})\right)_+ +\hat{p}\left(\overline{\xi}_j(\hat{p})\right)_-\right)+\sum_{j=1}^{k}\left(\hat{p}\left(\overline{\xi}_j(\hat{p})\right)_+ -\hat{p}A\left(\overline{\xi}_j(\hat{p})\right)_+\right)=\sum_{i=1}^{n}\hat{p}w_i+\sum_{j=1}^{k}\hat{p}\overline{\xi}_j(\hat{p}).$$

Кроме того,

$$\left(\sum_{i=1}^{n}w_i+\sum_{j=1}^{k}\overline{\xi}_j(\hat{p}),\left(\overline{\xi}_j(\hat{p})\right)_+ -A\left(\overline{\xi}_j(\hat{p})\right)_+\right)\in \operatorname{Arg\,max}\left\{\hat{p}y-\hat{p}z\middle|(y,z)\in\widetilde{T}\right\}.$$

Поскольку $(\hat{x},\hat{z})\in \operatorname{Arg\,max}\left\{\hat{p}y-\hat{p}z\middle|(y,z)\in\widetilde{T}\right\}$, отсюда следует в силу сильной выпуклости $D_j\ (j=1,\ldots,k)$, что

$$\hat{x}\le\sum_{i=1}^{n}w_i+\sum_{j=1}^{k}\overline{\xi}_j(\hat{p})$$

и, значит, $\hat{p}$ является вектором равновесных цен в модели с транзакционными издержками.

Пусть $\hat{p}$ вектор равновесных цен, т.е. $\hat{p} \in R_+^m \setminus \{0\}$ и существует вектор $\hat{x}$, такой что

$$\hat{x} \in \sum_{i=1}^{m} \overline{\Phi}_i(\hat{p}),$$

$$\hat{x} \le \sum_{j=1}^{k} \overline{\xi}_j(\hat{p}) + \sum_{i=1}^{n} w_i \,, \tag{4.2}$$

$$\hat{p}\left(\sum_{j=1}^{k} \overline{\xi}_j(\hat{p}) + \sum_{i=1}^{n} w_i - \hat{x} \right) = 0 \,. \tag{4.3}$$

Положим $\hat{y} = \sum_{j=1}^{k} \overline{\xi}_j(\hat{p}) + \sum_{i=1}^{n} w_i, \hat{z} = \sum_{j=1}^{k} \left(\overline{\xi}_j(\hat{p})\right)_+ - \sum_{j=1}^{k} A\left(\overline{\xi}_j(\hat{p})\right)_+$. Из (4.1) и $\hat{p} \in R_+^m \setminus \{0\}$ следует, что $(\hat{y}, \hat{z}) \in \operatorname{Arg\,max}\left\{\hat{p}y - \hat{p}z \,\middle|\, (y, z) \in \widetilde{T}\right\}$. Откуда в силу (4.2) и (4.3) имеем, что $(\hat{x}, \hat{z}) \in \operatorname{Arg\,max}\left\{\hat{p}y - \hat{p}z \,\middle|\, (y, z) \in \widetilde{T}\right\}$. Следовательно, $(\hat{x}, \hat{z})$ является решением ЗОП $\left(\widetilde{T}, \widetilde{\Omega}(\hat{x}, \hat{z})\right)$ и вектор $(\hat{p}, -\hat{p})$ ему соответствует. Предложение 2 доказано.

Список литературы

1. *Обен Ж.-П.* Нелинейный анализ и его экономические приложения. М.: Мир, 1988, 264 с.
2. *Шананин А.А.* Двойственность для задач обобщенного программирования и вариационные принципы в моделях экономического равновесия. // Доклады РАН, 1999, т.366, №4, с.
3. *Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А.* От госплана к неэффективному рынку: математический анализ российских экономических структур. New York: The Edwin Mellen Press, Ltd. 393 с.
4. *Никайдо Х.* Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир, 1972, 518 с.