УДК 519.86

ТЕОРЕМА О МАГИСТРАЛИ ДЛЯ МОДЕЛИ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ФИНАНСОВЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ.

Дорин Б. Л., Шананин А. А.
(Москва)

The turnpike theorem in the model of production system with financial constraints.

Dorine B. L., Shananin A.A.

Построена модель производственной системы при финансовых ограничениях. Для решения задачи линейного программирования, которая описывает поведение предприятий в данной модели, доказана теорема о магистрали, которая позволила рассматривать режимы сбалансированного экономического роста и получить численную оценку темпа роста ВВП, основываясь на параметрах технологической структуры, доли налогов и зарплаты в ВВП.

The model of production system with financial constraints is constructed. The turnpike theorem for the solution of linear programming problem which describes behavior of the producers in this model is proved. The proven theorem allow to consider balanced inflation growth and estimate rate of GDP growth.

1 Введение

Классические модели производственной системы, такие как модель Неймана-Гейла, описаны и довольно хорошо изучены [1]. В них учтено, что производители действуют при технологических и материальных ограничениях. Однако в переходной экономике дефицит оборотных средств, крайне ограниченные возможности привлечения кредитов накладывают на деятельность производителей не менее жесткие ограничения [2]. Поэтому классические модели малоприменимыми при описании поведения производителей в переходной экономике и возникает необходимость построения новых моделей, в которых учтено, что предприятия действуют в условиях жестких финансовых ограничений. В данной работе рассматривается модель такого типа.

Одним из достоинств рассматриваемой модели является то, что для решения задачи линейного программирования, которая описывает поведение предприятий в данной модели, удалось доказать теорему о магистрали, которая позволила рассматривать режимы сбалансированного экономического роста и получить численную оценку темпа роста ВВП, основываясь на параметрах технологической структуры, доли налогов и зарплаты в ВВП.

2 Модель производственной системы

Будем считать, что производители осуществляют выпуск продукции, используя основные и оборотные фонды. Будем учитывать, что имеющиеся основные фонды дифференцированы по времени создания. Основные фонды образуются в результате реализации инвестиционных проектов. Чтобы описать этот процесс, считаем, что капитальные затраты I_t в момент t порождают в момент $t+1$ производственную мощность I_t/b, где b — фондоемкость. В дальнейшем производственная мощность выбывает с постоянным темпом μ, так что в момент t мощность предприятий, созданных в момент $\tau \le t-1$, составит величину $\frac{1}{b}I_\tau(1+\mu)^{(\tau+1-t)}$. Кроме основных фондов выпуск продукции требует затрат сырья и рабочей силы. Предполагается, что для полной загрузки в момент t предприятий, созданных в момент $\tau \le t-1$, требуется затрачивать $\frac{\nu}{b}I_\tau$ единиц сырья, где ν — минимальная материалоемкость единицы продукта. Таким образом, мы предполагаем, что по мере старения предприятия затраты сырья не изменяются, в то время как выпуск продукции падает с темпом μ.

Предположим, что заработная плата равняется фиксированной доле n_1 от добавленной стоимости. Это предположение означает, что рабочая сила не лимитирует выпуск продукта, что вполне соответствует действительному положению вещей в российской экономике. Кроме того, это предположение позволяет считать, что налоги, взимаемые государством с производителей, также пропорциональны добавленной стоимости с коэффициентом n_2, который можно оценить по информации о собираемости налога на добавленную стоимость и налога на прибыль.

Из условия рентабельности определяется срок службы основных фондов $T_\mu = -\frac{lg(\nu)}{lg(1+\mu)}$. Объем производства Y_t и совокупные затраты Ψ_t в момент t вычисляются с помощью соотношений [1]

$$Y_t = \frac{1}{b}\sum_{k=t-1-T_\mu}^{t-1} I_k(1+\mu)^{k+1-t}; \qquad (2.1.)$$

$$\Psi_t = \frac{\nu}{b}\sum_{k=t-1-T_\mu}^{t-1} I_k. \qquad (2.2.)$$

Таким образом, технологическая структура производственной системы описывается параметрами фондоемкости b, материалоемкости ν, темпом выбытия основных фондов μ. Для современной экономики России эти параметры можно оценить как $b = 1.5$, $\nu = 0.35$, $\mu = 0.05$.[2]

Обозначим через p_t сложившийся в момент t на рынке продукта индекс цен. Будем рассматривать режимы с постоянным темпом инфляции ι. Тогда $p_t = p_0(1+\iota)^t$. Изменение ликвидных активов производителей (остатка расчетного счета) M^E, определяется доходами и расходами производителей. В момент t они тратят деньги на сырье $p_t\Psi_t$, инвестиции в основные фонды p_tI_t, выплату заработной платы $n_1(p_{t-1}Y_{t-1} - p_{t-1}\Psi_{t-1})$, выплату налогов $n_2(p_{t-1}Y_{t-1} - p_{t-1}\Psi_{t-1})$ и дивидендов Π_t^E. Производители получают выручку p_tY_t за реализацию произведенной продукции Y_t. Кроме того, производители могут брать кредиты L_t у коммерческих банков сроком на один год для осуществления инвестиционных проектов под процент r_L.

Уравнение изменения расчетного счета имеет вид

[1] Здесь и всюду далее суммирование по всем целым числам, лежащим от нижнего предела до верхнего.

[2] Здесь и всюду далее параметры оценивались по данным [4],[5].

$$M_{t+1}^E = M_t^E - \Pi_t^E + p_t Y_t - p_t I_t - p_t \Psi_t + L_t - (1 + r_L) L_{t-1} - (n_1 + n_2)(p_{t-1} Y_{t-1} - p_{t-1} \Psi_{t-1}). \qquad (2.3.)$$

Будем считать, что доля расходов на инвестиции, которую производители могут покрыть за счет кредита, равна ζ. То есть

$$L_t \le \zeta p_t I_t. \qquad (2.4.)$$

Величина ζ характеризует степень доверия коммерческих банков к инвестиционной деятельности производителей. Естественно предполагать, что $0 \le \zeta \le 1$. В теперешней российской экономической ситуации эта величина мала. Однако активная денежная политика государства позволяет изменять величину ζ.

Обозначим $n = n_1 + n_2$. Производителям необходимы деньги на выплату зарплаты, налогов и дивидендов. Ограничение ликвидности имеет вид

$$M_t^E \ge \Pi_t^E + n(p_{t-1} Y_{t-1} - p_{t-1} \Psi_{t-1}). \qquad (2.5.)$$

Будем считать, что целью производителей является максимизация дисконтированных дивидендов. Коэффициент дисконтирования будем брать равным проценту за кредит r_L. Таким образом, целевой функционал задачи имеет вид

$$\sum_{t=1}^{T} (1 + r_L)^{-t} \Pi_t^E, \qquad (2.6.)$$

где T — горизонт планирования деятельности производителей. Итак, будем описывать поведение производителей с помощью задачи линейного программирования, заключающейся в максимизации суммарной величины дисконтированных дивидендов по переменным I_t, L_t, Ψ_t, Y_t, Π_t^E, M_t^E при ограничениях (2.1.) - (2.5.), условии возврата кредитов

$$(1 - n) p_T (Y_T - \Psi_T) \ge (1 + r_L) L_{T-1}. \qquad (2.7.)$$

предположении о неотрицательности I_t, L_t, Π_t^E

$$\begin{array}{ll} I_t \ge 0, & t = 1, \ldots, T - 1; \\ L_t \ge 0, & t = 1, \ldots, T - 1; \\ \Pi_t^E \ge 0, & t = 1, \ldots, T \end{array} \qquad (2.8.)$$

и заданных начальных условиях

$$I_{-1-T_\mu}, \ldots, I_{-1},\ L_{-1},\ M_0^E, \Pi_0^E = M_0^E - n p_0 (Y_0 - \Psi_0). \qquad (2.9.)$$

3 Исследование модели производственной системы

В данном разделе мы исследуем оптимальное решение поставленной задачи линейного программирования. Очевидно, что наибольший темп роста экономической системы будет достигаться, если производители будут вкладывать всю прибыль в инвестиции, откладывая выплату дивидендов на окончание срока планирования. Ответ на вопрос о том, при каких условиях оптимальное решение описанной задачи устроено соответствующим образом, дает теорема о магистрали, для доказательства которой потребуются несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. Пусть $r_L > 0$ и выполняется соотношение

$$\frac{1 \quad n}{b}\Big((1+i)(1+\mu)(1 \quad \nu) \quad (1+i)^{T_\mu+2}((1+\mu)^{\ \ T_\mu} \quad \nu)\Big) > (1+\mu) \quad (1+i)(1 \quad \zeta). \qquad (3.1.)$$

Тогда на оптимальном решении задачи максимизации функционала (2.6.) при ограничениях (2.1.) - (2.5.),(2.7.) - (2.8.) и начальных условиях (2.9.) неравенство (2.5.) будет выполняться как равенство, т.е.

$$M_t^E = \Pi_t^E + n(p_{t \ 1}Y_{t \ 1} \quad p_{t \ 1}\Psi_{t \ 1}). \qquad (3.2.)$$

Доказательство. Обозначим через I_t^*, $\Pi_t^{E^*}$, L_t^* $(t = 1, \ldots, T)$ некоторое решение задачи максимизации. Допустим противное. Пусть в некоторый момент времени t' ограничение (2.5.) на этом решении выполняется как строгое неравенство

$$M_{t'}^{E^*} > \Pi_{t'}^{E^*} + n(p_{t' \ 1}Y_{t' \ 1}^* \quad p_{t' \ 1}\Psi_{t' \ 1}^*). \qquad (3.3.)$$

Покажем, что тогда можно построить новое решение I_t', $\Pi_t^{E'}$, L_t' $(t = 1, \ldots, T)$, удовлетворяющее ограничениям (2.1.) - (2.5.),(2.7.) - (2.8.) и на котором функционал задачи принимает большее значение, чем на исходном решении.

В каждый момент времени производитель получает положительный доход от эксплуатации уже имеющихся мощностей, который расходуется на погашение взятых ранее обязательств по кредитам, инвестиции и выплату дивидендов. Поэтому возможны три случая: 1) $L_{t'}^* > 0$, 2) ${\Pi_{t'+1}^E}^* > 0$, 3) $I_{t'+1}^* > 0$.

1) Пусть $L_{t'} > 0$. Построим новое решение следующим образом

$$\begin{array}{ll} I_t' = I_t^*, & t = 1, \ldots, T; \\ L_t' = L_t^*, & t = 1, \ldots, t' \quad 1, t'+1, \ldots, T; \\ L_{t'}' = L_{t'}^* \quad \delta; & \\ \Pi_t^{E'} = \Pi_t^{E^*}, & t = 1, \ldots, t', t'+2, \ldots, T; \\ {\Pi_{t'+1}}' = {\Pi_{t'+1}^E}^* + r_L\delta, & \end{array} \qquad (3.4.)$$

где δ - малое положительное число, выбираемое из условия
$\delta < min\Big(L_{t'}^*, M_{t'}^{E^*} \quad \Pi_{t'}^{E^*} \quad n(p_{t' \ 1}Y_{t' \ 1}^* \quad p_{t' \ 1}\Psi_{t' \ 1}^*)\Big)$.

Данное решение удовлетворяет ограничениям задачи, но в силу положительности r_L, функционал (2.6.) достигает на нем большего значения, чем на исходном решении.

2) Пусть ${\Pi_{t'+1}^E}^* > 0$. Рассмотрим

$$\begin{array}{ll} I_t' = I_t^*, & t = 1, \ldots, T; \\ L_t' = L_t^*, & t = 1, \ldots, T; \\ \Pi_t^{E'} = \Pi_t^{E^*}, & t = 1, \ldots, t' \quad 1, t'+2, \ldots, T; \\ {\Pi_{t'}}' = \Pi_{t'}^{E^*} + \delta; & \\ {\Pi_{t'+1}}' = {\Pi_{t'+1}^E}^* \quad \delta, & \end{array} \qquad (3.5.)$$

где δ - малое положительное число, выбираемое таким образом, чтобы неравенство (3.3.) не нарушилось и переменная ${\Pi_{t'+1}}'$ была положительной.

Легко проверить, что построенное решение I_t', $\Pi_t^{E'}$, L_t' $(t = 1, \ldots T,)$ удовлетворяет ограничениям (2.1.) - (2.5.), (2.7.) - (2.8.). С другой стороны, так как коэффициент дисконтирования положителен, функционал на этом решении принимает значение большее чем на решении I^*_t, $\Pi^{E^*}_t$, L^*_t $(t = 1, \ldots, T)$.

3) Пусть $I^*_{t'+1} > 0$. Ограничение (2.4.) в момент времени $t'+1$ может выполняться как строгое неравенство или как равенство. Начнем с рассмотрения последнего случая. Положим

$$\begin{array}{ll}
L'_t = L^*_t, & t = 1, \ldots t', t'+2 \ldots, T; \\
L'_{t'+1} = L^*_{t'+1} - \delta\zeta p_{t'+1}; & \\
I'_t = I^*_t, & t = 1, \ldots, t'-1, t'+2, \ldots, T; \\
I'_{t'} = I^*_{t'} + \delta(1+\mu); & \\
I'_{t'+1} = I^*_{t'+1} - \delta; & \\
\Pi^{E'}_\tau = \Pi^{E^*}_\tau + \alpha; & \\
\Pi^{E'}_t = \Pi^{E^*}_t, & t = 1, \ldots, T, \quad t \neq \tau,
\end{array}$$

где $\tau = min(T, t' + T_\mu + 4)$, δ положительное число, удовлетворяющее условию

$$\delta < min\left(I'_{t'+1}, M^{E^*}_{t'} - \Pi^{E^*}_{t'} - n(p_{t'-1}Y^*_{t'-1} - p_{t'-1}\Psi^*_{t'-1})\right),$$

$$\begin{array}{rcl}
\alpha & = & \frac{1-n}{b}\delta\left(p_{t'+1}(1+\mu)(1-\nu) - p_{t'+T_\mu+2}((1+\mu)^{-T_\mu} - \nu)\right) + \\
& & +\delta(p_{t'+1}(1-\zeta) - p_{t'}(1+\mu)).
\end{array}$$

Заметим, что в силу условий (3.1.) величина α строго положительна. Следовательно, переменные I'_t, $\Pi^{E'}_t$, L'_t $(t = 1, \ldots, T)$ неотрицательны и функционал принимает на новом решении большее значение. Переменные Y'_t,Ψ'_t, $M^{E'}_t$ $(t = 1, \ldots, T)$ вычислим по формулам (2.1.), (2.2.), (2.3.), соответственно.

Легко заметить, что неравенства (2.4.) выполняются. Остается проверить выполнение неравенств (2.5.).

Обозначим $N_t = p_t(Y_t - \Psi_t)$ $(t = 1, \ldots, T)$. Тогда в силу (2.3.)

$$\Delta M^E_{t'+2} = {M^E_{t'+2}}' - {M^E_{t'+2}}^* = \Delta M^E_{t'+1} + \Delta N_{t'+1} - p_t \Delta I_{t'+1} + \Delta L_{t'+1};$$

$${M^E_{t'+2}}' = {M^E_{t'+2}}^* + \delta(p_{t'+1}(1-\zeta) - p_{t'}(1+\mu)) + \frac{\delta}{b}p_{t'+1}(1+\mu)(1-\nu). \qquad (3.6.)$$

Ограничение (2.5.) в момент времени $t'+2$ примет вид

$${M^E_{t'+2}}' \geq {\Pi^E_{t'+2}}^* + nN^*_{t'+1} + \Delta N_{t'+1};$$

$${M^E_{t'+2}}' \geq {\Pi^E_{t'+2}}^* + nN^*_{t'+1} + \frac{n\delta}{b}p_{t'+1}(1+\mu)(1-\nu). \qquad (3.7.)$$

Для исходного решения I^*_t, $\Pi^{E^*}_t$, L^*_t $(t = 1, \ldots, T)$ ограничение (2.5.) в момент времени $t'+2$ выполнялось. Следовательно, для выполнения неравенства (3.7.) с учетом (3.6.) достаточно потребовать выполнения условия

$$\frac{1-n}{b}(1+i)(1+\mu)(1-\nu) \geq (1+\mu) - (1+i)(1-\zeta). \qquad (3.8.)$$

Но (3.8.) выполняется в силу условия (3.1.). Следовательно, выполняется неравенство (3.7.).

Теперь заметим, что $\Delta N_t = 0$ при $t = t'+2, \dots, min(T, t'+T_\mu+1)$, а следовательно будут выполняться следующие соотношения

$$\begin{array}{l} \Delta M_{t'+3} = \Delta M_{t'+2} - n\Delta N_{t'+1} - (1+r_L)\Delta L_{t'+1}; \\ \Delta M_t = \Delta M_{t-1}, \quad t = t'+4, \dots, min(T, t'+T_\mu+2). \end{array} \qquad (\ 3.9.)$$

Таким образом, получаем

$$\begin{array}{rcl} \Delta M_t & = & \frac{1-n}{b}\delta p_{t'+1}(1+\mu)(1-\nu) + \delta(p_{t'+1}(1-\zeta) - p_{t'}(1+\mu)) + \\ & & +\delta(1+r_L)\zeta p_{t'+1}, \\ & & t = t'+3, \dots, t'+T_\mu+2. \end{array} \qquad (\ 3.10.)$$

Из неравенства (3.8.) следует, что последние приращения неотрицательны. Следовательно неравенства (2.5.) при $t = t'+3, \dots, min(T, t'+T_\mu+2)$ будут выполняться.

Пусть $T > t'+T_\mu+2$, тогда

$$\Delta M^E_{t'+T_\mu+3} = \Delta M^E_{t'+T_\mu+2} + \Delta N_{t'+T_\mu+2},$$

$$\begin{array}{rcl} \Delta M^E_{t'+T_\mu+3} & = & \frac{1-n}{b}\delta p_{t'+1}(1+\mu)(1-\nu) + \delta(p_{t'+1}(1-\zeta) - p_{t'}(1+\mu)) + \\ & & +\delta(1+r_L)\zeta p_{t'+1} - \frac{\delta}{b} p_{t'+T_\mu+2}((1+\mu)^{-T_\mu} - \nu). \end{array} \qquad (\ 3.11.)$$

Ограничение (2.5.) в момент времени $t'+T_\mu+3$ примет вид

$$M^{E}_{t'+T_\mu+3}{}' \geq \Pi^{E}_{t'+T_\mu+2}{}^{*} + nN^*_{t'+T_\mu+2} + \frac{n\delta}{b} p_{t'+T_\mu+2}((1+\mu)^{-T_\mu} - \nu). \qquad (\ 3.12.)$$

Для выполнения последнего неравенства достаточно потребовать выполнения соотношения

$$\begin{array}{l} \frac{1-n}{b}\Big((1+i)(1+\mu)(1-\nu) - (1+i)^{T_\mu+2}((1+\mu)^{-T_\mu} - \nu)\Big) + (1+r_L)\zeta(1+i) \geq \\ \geq (1+\mu) - (1+i)(1-\zeta). \end{array} \qquad (\ 3.13.)$$

Справедливость данного неравенства следует из (3.1.).

Следовательно, неравенства (2.5.) выполняются для переменных $I'_t, \Pi^{E'}_t, L'_t$ при $t = 1, \dots, T$.

В случае если $I^*_{t'+1} > 0$ и ограничение (2.4.) в момент времени $t'+1$ выполняется как строгое неравенство, можно рассмотреть следующую вариацию исходного решения

$$\begin{array}{ll} L'_t = L^*_t, & t = 1, \dots, T; \\ I'_t = I^*_t, & t = 1, \dots, t'-1, t'+2, \dots, T; \\ I'_{t'} = I^*_{t'} + \delta(1+\mu); & \\ I'_{t'+1} = I^*_{t'+1} - \delta; & \\ \Pi^{E'}_\tau = \Pi^{E*}_\tau + \alpha; & \\ \Pi^{E'}_t = \Pi^{E*}_t, & t = 1, \dots, T, \quad t \neq \tau, \end{array}$$

где $\tau = min(T, t'+T_\mu+4)$, δ положительное число, удовлетворяющее условию

$$\delta < min\left(\frac{\zeta p_{t'+1} - L_{t'+1}}{\zeta p_{t'+1}}, I'_{t'+1}, M^{E*}_{t'} - \Pi^{E*}_{t'} - n(p_{t'-1}Y^*_{t'-1} - p_{t'-1}\Psi^*_{t'-1})\right),$$

$$\alpha = \tfrac{1-n}{b}\delta\left(p_{t'+1}(1+\mu)(1-\nu) - p_{t'+T_\mu+2}((1+\mu)^{-T_\mu}-\nu)\right) + \\ +\delta(p_{t'+1} - p_{t'}(1+\mu)).$$

Как уже отмечалось, в силу условий (3.1.) величина α строго положительна, а следовательно на данном решении функционал (2.6.) принимает значение большее, чем на исходном решении. По аналогии с только что проделанными выкладками, можно показать, что данное решение будет удовлетворять ограничениям задачи, если выполняется условие

$$\frac{1-n}{b}\left((1+i)(1+\mu)(1-\nu) - (1+i)^{T_\mu+2}((1+\mu)^{-T_\mu}-\nu)\right) \geq \mu - i. \qquad (3.14.)$$

Данное неравенство, как и (3.13.), является следствием (3.1.) .

Итак, если неравенство (2.5.) в какой-то момент времени на решении I_t^*, $\Pi_t^{E^*}$, L_t^* выполняется как строгое неравенство, то можно построить новое решение, удовлетворяющее всем ограничениям задачи, на котором функционал принимает большее значение, чем на исходном решении, что противоречит оптимальности решения I_t^*, $\Pi_t^{E^*}$, L_t^* $(t=1,\ldots,T)$. Лемма 1 доказана.

Используя лемму 1, с помощью (2.1.) - (2.4.) мы можем записать

$$\Pi_{t+1}^E = (1-n)p_t(Y_t - \Psi_t) - p_t I_t + L_t - (1+r_L)L_{t-1}. \qquad (3.15.)$$

Далее, исключая с помощью (2.1.) (2.2.) переменные Ψ_t, Y_t, получаем задачу линейного программирования

$$\sum_{t=0}^{T-1}(1+r_L)^{-t}\Big(p_t\tfrac{1-n}{b}\sum_{k=t-1-T_\mu}^{t-1} I_k\left((1+\mu)^{k+1-t}-\nu\right) - p_t I_t + L_t - (1+r_L)L_{t-1}\Big) \to \max, \qquad (3.16.)$$

$$p_t\tfrac{1-n}{b}\sum_{k=t-1-T_\mu}^{t-1} I_k\left((1+\mu)^{k+1-t}-\nu\right) - p_t I_t + L_t - (1+r_L)L_{t-1} \geq 0, \qquad (3.17.)$$

$$p_T\tfrac{1-n}{b}\sum_{k=T-1-T_\mu}^{T-1} I_k((1+\mu)^{k+1-T}-\nu) \geq (1+r_L)L_{T-1}, \qquad (3.18.)$$

$$L_t \leq \zeta p_t I_t, \qquad (3.19.)$$

$$I_t \geq 0,\ L_t \geq 0,\ t=0,\ldots,T-1. \qquad (3.20.)$$

Обозначим через $q_t(1+r_L)^{-t} \geq 0$ - двойственную переменную к неравенствам (3.17.), $q_T(1+r_L)^{-T} \geq 0$ - двойственную переменную к неравенству (3.18.) и $s_t(1+r_L)^{-t} \geq 0$ - двойственную переменную к неравенствам (3.19.). Двойственная задача линейного программирования к задаче (3.16.) - (3.20.) имеет вид

$$\tfrac{1-n}{b}\sum_{t=0}^{T_\mu}(1+q_t)(1+r_L)^{-t}p_t\sum_{\tau=t-1-T_\mu}^{min(-1,t-1)} I_\tau\left((1+\mu)^{\tau+1-t}-\nu\right) - (1+q_0)(1+r_L)L_{-1} \to \min, \qquad (3.21.)$$

$$(1+q_t)p_t \geq s_t\zeta p_t + \tfrac{1 \;\; n}{b}\sum_{k=t+1}^{t+1+T_\mu} p_k(1+q_k)(1+r_L)^{t \;\; k}\left((1+\mu)^{\;\; k+t+1} \quad \nu\right), \qquad (\ 3.22.)$$
$$t = 0,\dots,T \quad 1 \quad T_\mu;$$

$$(1+q_t)p_t \geq s_t\zeta p_t + \tfrac{1 \;\; n}{b}\sum_{k=t+1}^{T} p_k(1+q_k)(1+r_L)^{t \;\; k}\left((1+\mu)^{\;\; k+t+1} \quad \nu\right), \qquad (\ 3.23.)$$
$$t = T \quad T_\mu,\dots,T \quad 1;$$

$$s_t \geq q_t \quad q_{t+1},\ t=0,\dots,T \quad 1; \qquad (\ 3.24.)$$

$$s_t \geq 0, \quad q_t \geq 0,\ t=0,\dots,T \quad 1. \qquad (\ 3.25.)$$

Обозначим R внутреннюю доходность от вложения в промышленность (internal rate of return), которая находится как корень следующего уравнения

$$p_t = \frac{1 \quad n}{b}\sum_{k=t+1}^{t+1+T_\mu} p_k(1+R)^{t \;\; k}\left((1+\mu)^{\;\; k+t+1} \quad \nu\right). \qquad (\ 3.26.)$$

При постоянном темпе инфляции i данное уравнение можно записать в виде

$$1 = \frac{1 \quad n}{b}\sum_{k=t+1}^{t+1+T_\mu}\left(\frac{1+R}{1+i}\right)^{t \;\; k}\left((1+\mu)^{\;\; k+t+1} \quad \nu\right)$$

или

$$1 = \frac{1 \quad n}{b}\sum_{k=t+1}^{t+1+T_\mu}(1+\delta_e)^{t \;\; k}\left((1+\mu)^{\;\; k+t+1} \quad \nu\right),$$

где

$$1+\delta_e = \frac{1+R}{1+i}. \qquad (\ 3.27.)$$

Таким образом видно, что величина R зависит линейно от темпа инфляции i. При параметрах характерных для нынешнего состояния технологической базы России величина $\delta_e = 0.1$.

Будем считать, что выполняются следующие соотношения

$$r_L = R \quad \epsilon, \qquad (\ 3.28.)$$

$$\zeta < \frac{1 \quad n}{b}\frac{1 \quad \nu}{1+\delta_e}, \qquad (\ 3.29.)$$

где $\epsilon > 0$ - малая величина.

Лемма 2. Пусть выполняются условия (3.28.), (3.29.). Тогда динамическая система

$$\begin{aligned} q_t \;&=\; \zeta(q_t \quad q_{t+1})_+ + \tfrac{1 \;\; n}{b}(1 \quad \nu)(1+q_{t+1})\tfrac{1+i}{1+r_L} + \\ &+ \tfrac{1 \;\; n}{b}\sum_{k=t+2}^{t+1+T_\mu}(1+q_k)\left(\tfrac{1+i}{1+r_L}\right)^{k \;\; t}\left((1+\mu)^{\;\; k+t+1} \quad \nu\right) \quad 1 \end{aligned} \qquad (\ 3.30.)$$

с начальными условиями $q_t = 0$ при $t > T \quad T_\mu \quad 1$ имеет монотонно возрастающую в обратном времени траекторию.

Доказательство. При $t = T \quad T_\mu \quad 1$ в силу начальных условий имеем

$$1+(1-\zeta)q_t=\tfrac{1-n}{b}\sum_{k=t+1}^{t+1+T_\mu}\left(\tfrac{1+i}{1+r_L}\right)^{k-t}\left((1+\mu)^{-k+t+1}-\nu\right).$$

Так как $r_L < R$, в правой части последнего равенства стоит величина большая единицы, следовательно $q_t > 0$. Таким образом можно записать

$$\begin{aligned} &q_t-q_{t+1}\geq 0 \quad t > T-1-T_\mu, \\ &q_{T-1-T_\mu}-q_{T-T_\mu}>0. \end{aligned} \qquad (3.31.)$$

Вычтем из обеих частей равенства (3.30.) $1+q_{t+1}$

$$(1-\zeta)(q_t-q_{t+1})=-(1+q_{t+1})+\frac{1-n}{b}\sum_{k=t+1}^{t+1+T_\mu}(1+q_k)\left(\frac{1+i}{1+r_L}\right)^{k-t}\left((1+\mu)^{-k+t+1}-\nu\right).$$

Подставляя в правую часть последнего равенства выражение (3.30.) для q_{t+1}, получим

$$\begin{aligned}(1-\zeta)(q_t-q_{t+1}) = & \left(-\zeta+\tfrac{1-n}{b}(1-\nu)\tfrac{1+i}{1+r_L}\right)(q_{t+1}-q_{t+2})+ \\ & +\tfrac{1-n}{b}\sum_{k=t+1}^{t+1+T_\mu}(q_k-q_{k+1})\left(\tfrac{1+i}{1+r_L}\right)^{l-t}\left((1+\mu)^{-k+t+1}-\nu\right).\end{aligned}$$

Отсюда с учетом условий (3.28.), (3.29.) видно, что если при $k=t+1,\dots,t+T_\mu+1$ $q_k \geq q_{k+1}$ и существует k такое, что $q_k > q_{k+1}$, то $q_t > q_{t+1}$. Таким образом по индукции можно показать, что система (3.30.) с нулевыми начальными условиями имеет монотонно возрастающее в обратном времени решение. Лемма 2 доказана.

Пусть $\Pi^E_{t+1}=0$ и $L_t=\zeta p_t I_t$. Пусть также величина I_t растет с постоянным темпом γ, т.е. $I_t=I_0(1+\gamma)^t$. Тогда из (3.15.) получаем уравнение на темп роста γ

$$(1-\zeta)=\frac{1-n}{b}\sum_{k=t-1-T_\mu}^{t-1}(1+\gamma)^{k-t}\left((1+\mu)^{k+1-t}-\nu\right)-\frac{1+\delta_e}{1+\gamma}\zeta. \qquad (3.32.)$$

Заметим, что при $\gamma > -1$ правая часть уравнения (3.32.) при условии (3.29.) монотонна по γ. Следовательно уравнение (3.32.) имеет единственный корень в данной области.

Темп экономического роста γ, полученный как корень данного уравнения не зависит от темпа инфляции i и для нынешнего состояния российской экономики составляет порядка 0.1.

Рассмотрим динамическую систему

$$(1-\zeta)I_t=-\zeta\frac{1+r_L}{1+i}I_{t-1}+\frac{1-n}{b}\sum_{k=t-1-T_\mu}^{t-1}I_k((1+\mu)^{1-k-t}-\nu). \qquad (3.33.)$$

Лемма 3. Пусть выполняются условия (3.28.), (3.29.). Тогда при любых начальных условиях
$I_{-1-T_\mu},\dots,I_{-1}$ для любого $\epsilon>0$ найдется $T_0(\epsilon)$ такой, что

$$\left|\frac{I_{t+1}}{I_t}-1-\gamma\right|<\epsilon \qquad t>T_0(\epsilon),$$

где γ - корень уравнения (3.32.)

Доказательство.
Обозначим

$$a_t = \begin{pmatrix} I_t \\ I_{t-1} \\ \vdots \\ I_{t-T_\mu-1} \end{pmatrix}$$

Тогда (3.33.) можно переписать в следующем виде

$$a_t = Aa_{t-1},$$

$$A = \begin{pmatrix} \zeta\frac{1+r_L}{1+i} + \frac{1-n}{b}(1-\nu) & \alpha_{-1} & \alpha_{-2} & \cdots & \alpha_{-T_\mu} & \alpha_{-T_\mu-1} \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Можно показать, что характеристическое уравнение(относительно $\lambda = 1 + \gamma$ данной матрицы совпадает с уравнением (3.32.).

При выполнении условия (3.29.) матрица А - положительна. Следовательно по теореме Фробениуса-Перрона она имеет положительное максимальное по модулю собственное число $(1+\gamma^*)$[3]. Обозначим а - вектор Фробениуса-Перрона матрицы А. Матрица А - неразложима и импримитивна, следовательно $(1+\gamma^*)$ единственный корень с максимальным модулем [3]. По теореме об устойчивых матрицах [3] выполняется

$$\lim_{t\to\infty} \rho(A^t a_0, a) = 0,$$

где

$$\rho(a,b) = \left\| \frac{a}{\|a\|} - \frac{b}{\|b\|} \right\|.$$

Таким образом, имеем

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\|A^{t+1}a_0\|}{\|A^t a_0\|} = (1+\gamma^*).$$

Лемма 3 доказана.

Теорема 1(о магистрали). Пусть выполняются условия (3.1.),(3.28.)-(3.29.). Тогда существует такое решение задачи (3.16.) - (3.20.),что

1. $\Pi_t^E = 0$, при $0 \le t < T - 1 - T_\mu$;
2. $L_t = \zeta p_t I_t$, при $0 \le t < T - 1 - T_\mu$;
3. для любого $\epsilon > 0$ найдется $T_0(\epsilon)$ такой, что при $T - 1 - T_\mu > t > T_0(\epsilon)$

$$\left|\frac{I_{t+1}}{I_t} \quad 1 \quad \gamma\right| < \epsilon,$$

где γ - корень уравнения (3.32.).

Доказательство. Ограничения (3.22.) - (3.23.) можно переписать в следующем виде

$$\begin{aligned}(1+q_t) \;\; &\geq \;\; s_t\zeta + \tfrac{1 \;\; n}{b}(1 \quad \nu)(1+q_{t+1})(1+\delta_e)^{\;\;1} + \\ &+ \tfrac{1 \;\; n}{b}\sum_{k=t+2}^{t+1+T_\mu}(1+\delta_e)^{t \;\; k}(1+q_k)\left((1+\mu)^{\;\;k+t+1} \quad \nu\right),\end{aligned} \qquad (3.34.)$$

$t = 0, \ldots, T \quad 1 \quad T_\mu;$

$$(1+q_t) \;\; \geq \;\; s_t\zeta + \tfrac{1 \;\; n}{b}\sum_{k=t+1}^{T}(1+\delta_e)^{t \;\; k}(1+q_k)\left((1+\mu)^{\;\;k+t+1} \quad \nu\right), \qquad (3.35.)$$

$t = T \quad T_\mu, \ldots, T.$

Выпишем условия дополняющей нежесткости для задач (3.16.) - (3.20.) и (3.21.), (3.34.), (3.35.), (3.24.),(3.25.)

$$\begin{aligned}&(I_t, (1+q_t) \quad (s_t\zeta + \tfrac{1 \;\; n}{b}(1 \quad \nu)(1+q_{t+1})(1+\delta_e)^{\;\;1} + \\ &+ \tfrac{1 \;\; n}{b}\sum_{k=t+2}^{t+1+T_\mu}(1+\delta_e)^{t \;\; k}(1+q_k)\left((1+\mu)^{\;\;k+t+1} \quad \nu\right))) = 0, \\ &t = 0, \ldots, T \quad 1 \quad T_\mu;\end{aligned} \qquad (3.36.)$$

$$\begin{aligned}&(I_t, (1+q_t) \quad (s_t\zeta + \\ &+ \tfrac{1 \;\; n}{b}\sum_{k=t+1}^{T}(1+\delta_e)^{t \;\; k}(1+q_k)\left((1+\mu)^{\;\;k+t+1} \quad \nu\right))) = 0, \\ &t = T \quad T_\mu, \ldots, T;\end{aligned} \qquad (3.37.)$$

$$\begin{aligned}&(L_t, s_t \quad (q_t \quad q_{t+1})) = 0, \\ &t = 0, \ldots, T \quad 1;\end{aligned} \qquad (3.38.)$$

$$\begin{aligned}&(q_t, p_t\tfrac{1 \;\; n}{b}\sum_{k=t \;\; 1 \;\; T_\mu}^{t \;\; 1} I_k\left((1+\mu)^{k+1 \;\; t} \quad \nu\right) \quad p_tI_t + L_t \quad (1+r_L)L_{t \;\; 1})) = 0, \\ &t = 0, \ldots, T \quad 1;\end{aligned} \qquad (3.39.)$$

$$(q_T, p_T\frac{1 \quad n}{b}\sum_{k=T \;\; 1 \;\; T_\mu}^{T \;\; 1} I_k((1+\mu)^{k+1 \;\; T} \quad \nu) \quad (1+r_L)L_{T \;\; 1},) = 0; \qquad (3.40.)$$

$$\begin{aligned}&(s_t, L_t \quad \zeta p_tI_t) = 0, \\ &t = 0, \ldots, T \quad 1.\end{aligned} \qquad (3.41.)$$

В качестве решения прямой задачи выберем решение, при котором $I_t \geq 0$, $L_t = \zeta p_t I_t$ и ограничение (3.17.) выполняется как равенство при $t \leq T \quad T_\mu \quad 1$. При $t > T \quad T_\mu \quad 1$ $I_t = L_t = 0$.

Положим $s_t = (q_t - q_{t+1})_+$, а $q_t = 0$ при $t > T - T_\mu - 1$. Далее q_t мы будем выбирать так, чтобы в ограничениях (3.34.) выполнялось равенство. По лемме 2 q_t будут возрастать в обратном времени при $t \le T - T_\mu - 1$. Следовательно $s_t = q_t - q_{t+1}$ при $t = 0, \ldots, T - T_\mu - 1$.

Легко убедиться, что построенные решения прямой задачи (3.16.) - (3.20.) (I_t, L_t) и двойственной задачи (3.21.), (3.34.), (3.35.), (3.24.),(3.25.) (q_t, s_t) удвоудовлетворяют условиям дополняющей нежесткости (3.36.)-(3.41.). Это означает, что приведенные решения будут оптимальными.

Далее, заметим, что по построению при $0 \le t \le T - T_\mu - 1$ I_t есть траектория динамической системы (3.33.), а следовательно, согласно лемме 3, будет выполняться третья часть утверждения теоремы. Теорема доказана.

В соответствии с доказанной теоремой, по начальным данным (2.9.) с использованием формулы (3.33.) мы можем строить оптимальное решение задачи (3.16.) - (3.20.). При различных начальных условиях мы будем получать разные решения. Однако, согласно третьей части утверждения теоремы, при больших t эти решения будут мало отличаться от решения (I_t^*, L_t^*), порожденного начальными условиями, следующего вида

$$\begin{aligned}
&I^*_{-1-T_\mu} > 0;\\
&I_t^* = I_{t-1}^*(1+\gamma), \quad t = -T_\mu, \ldots, -1;\\
&L^*_{-1} = \zeta p_{-1} I^*_{-1},
\end{aligned}$$

где γ - корень уравнения (3.32.). Данное решение соответствует режиму сбалансированного инфляционного роста. В таком режиме натуральные показатели, такие как I_t, Y_t, Ψ_t, растут (или падают) с некоторым одинаковым постоянным темпом γ

$$I_t = (1+\gamma)^t I_0,$$

$$Y_t = (1+\gamma)^t Y_0,$$

а номинальные финансовые показатели, такие как ВВП (валовой внутренний продукт), L_t, растут с темпом $(1+\gamma)(1+\iota) - 1$, т.е.

$$p_t(Y_t - \Psi_t) = ((1+\gamma)(1+\iota))^t\, p_0(Y_0 - \Psi_0).$$

$$L_t = [(1+\gamma)(1+\iota)]^t L_0.$$

На рассматриваемом режиме сбалансированного роста с темпом γ получим связь между Y_t, Ψ_t и I_t

$$Y_t = \frac{I_t}{b(1+\gamma)} \frac{1 - [(1+\gamma)(1+\mu)]^{-T_\mu - 1}}{1 - [(1+\gamma)(1+\mu)]^{-1}}, \tag{3.42.}$$

$$\Psi_t = \frac{I_t \nu}{b(1+\gamma)} \frac{1 - (1+\gamma)^{-T_\mu - 1}}{1 - (1+\gamma)^{-1}}. \tag{3.43.}$$

4 Результаты численных исследований

Расчеты проводились при значениях параметров, соответствующих положению нынешней российской экономики:

средняя фондоемкость единицы мощности	1.5 года
минимальный коэффициент материалоемкости единицы продукта	0.35 [1]
норма кредитования инвестиционных проектов коммерческими банками	0.3
темп выбытия мощностей	0.05 1/год
доля заработной платы в ВВП	0.35
доля налогов в ВВП	0.2

Как уже отмечалось, данному набору параметров соответствует корень уравнения (3.32.) $\gamma = 0.1$. Надо отметить, что это довольно большой темп роста. Десятипроцентный темп роста ВВП наблюдается редко. Однако надо помнить, что полученные в рамках данной модели значения являются оценкой сверху темпа роста ВВП. На реальное значение темпа роста существенное значение оказывают государственная политика, взаимодействие между агентами, всевозможные транзакционные издержки.

Также были изучены зависимости полученной оценки темпа роста от параметров модели. Для этого варьировалось значение одного из параметров при постоянных значениях остальных параметров. Графики зависимости оценки темпа роста от коэффициента фондоемкости, материалоемкости, темпа выбытия мощностей и доли налогов и зарплаты в ВВП приведены на рисунках Рис.1- Рис.4 соответственно.

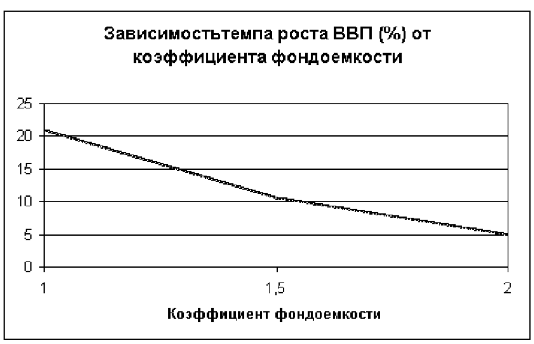

Рис. 1.

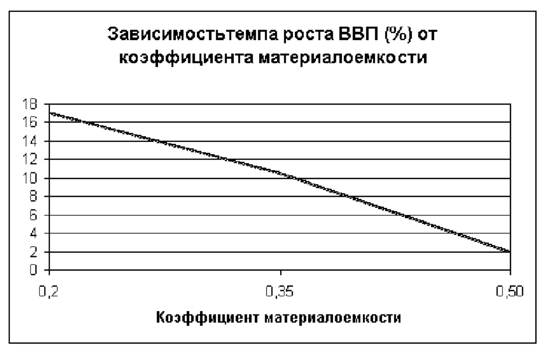

Рис. 2.

Как и следовало ожидать, улучшение технологической структуры производства является существенным рычагом повышения темпов роста ВВП (Рис.1- Рис.3). Увеличение коэффициента фондоемкости на 30 % ведет к падению максимально возможного темпа роста до

[1] Минимальный коэффициент материалоемкости отличается от средней материалоемкости, которая может быть вычислена по формуле $\frac{\Psi_t}{Y_t \quad \Psi_t}$ и, в соответствии с формулами (3.42.), (3.43.), зависит от темпа роста γ.

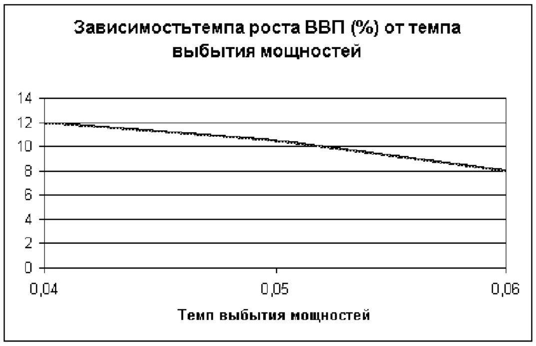

Рис. 3.

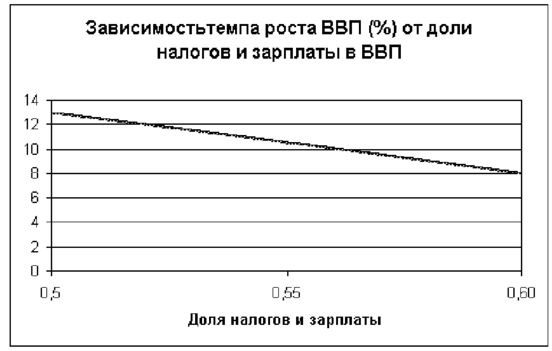

Рис. 4.

5 % в год, в то время как при возрастании темпа выбытия мощностей до 0.06 1/год, темп роста уменьшается на 2 %. Снижение доли налогов в ВВП также ведет к увеличению темпов роста Рис.4. Однако, надо помнить, что перспективы политики направленной на повышение должны оцениваться с использованием замкнутой макроэкономической модели.

References

[1] Ашманов С. А. Введение в математическую экономику. М.: Наука, 1984. 294с

[2] Автухович Э.В., Бурова Н.К., Дорин Б.Л. Панов С.С. Петров А.А., Поспелов И.Г., Поспелова И.И., Ташлицкая Я.М., Чуканов С.В. Шананин А.А., Шапошник Д.В. Оценка потенциала роста экономики России с помощью математической модели. М.: ВЦ РАН, 2000.

[3] Никайдо. Выпуклые структуры и математическая экономика. М:,Мир, 1972.

[4] Российский статистический ежегодник, 1997, Госкомстат.

[5] Обзор экономики России, М., 1993-1999