ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2000, № 3, с. 107–110

РАСПОЗНАВАНИЕ ОБРАЗОВ И ОБРАБОТКА ИЗОБРАЖЕНИЙ

УДК 62.50

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СОХРАНЕНИЯ КРОМКИ ПРИ ПОДАВЛЕНИИ ШУМОВ ПОСРЕДСТВОМ АНИЗОТРОПНОЙ ДИФФУЗИИ*

© 2000 г. В. И. Цурков

Москва, ВЦ РАН

Поступила в редакцию 15.11.99 г.

В статье построена модель сохранения кромок при фильтрации изображений по методу нелинейной диффузии. Кромки представляют собой сингулярные функции гельдеровского типа.

Введение. В 1990 г. П. Перона и Дж. Малик [1] предложили использовать дифференциальные уравнения в частных производных параболического типа при обработке двумерных изображений. Основная идея данного подхода заключается в следующем. Как известно, если рассматривать задачу с начальными значениями для уравнения диффузии (теплопроводности), то имеет место тенденция сглаживания возмущений благодаря специфике параболических уравнений. Таким образом, можно было бы ликвидировать шумы при обработке изображений. Однако благодаря той же тенденции параболических уравнений одновременно бы расплывались и кромки, где начальные градиенты бесконечны. А это привело бы к размазыванию изображений. Авторы [1] предложили брать коэффициент диффузии зависящим от градиента

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(g(|\nabla u|)\nabla u).$$

При этом коэффициент стремится к нулю, когда градиент становится бесконечным, т.е. $g(|\nabla u|) \geq 0$, $g(|\nabla u|) \longrightarrow 0$ при $|\nabla u| \longrightarrow \infty$. Другими словами, ставится задача об одновременной ликвидации шумов и сохранении бесконечных градиентов, т.е. кромок. Эта проблема повлекла за собой серию статей, среди которых отметим работы [2, 3], где предлагается приближенное уравнение со сверткой

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(g(|DG_\sigma u|)\nabla u) = 0,$$

где вводится гауссиан $G_\sigma(x) = C\sigma^{1/2}\exp\left(-\frac{|x|^2}{4\sigma}\right)$, а σ – малый параметр. При $\sigma \longrightarrow 0$ свертка стремится к частной производной. Все рассмотрения и численные расчеты ведутся при фиксированном значении малого параметра. Авторы [3] не рассматривают предельное решение при $\sigma \longrightarrow 0$. Там же высказано, что дивергентная форма модели Пероны-Малика может привести к неустойчивости по Адамару при постановке задачи с начальными значениями, поэтому предлагается недивергентная форма параболических уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g(|DG_\sigma u|)|Du|\operatorname{div}\left(\frac{Du}{|Du|}\right).$$

В данной работе получены следующие результаты. Для одномерного по пространственным переменным случая найдены автомодельные решения уравнений анизотропной диффузии, когда коэффициент степенным образом зависит от производной

$$c(u_x) = \frac{1}{(u_x)^m}, \quad m > 0.$$

Эти решения интерпретируют сохранение бесконечных градиентов во времени. Этот факт имеет место при условии $m > 2$ и называется нами аналитической моделью сохранения кромки в анизотропной диффузии. Замечено, что для показателя $m > 2$ задача с начальными значениями в дивергентной модели Пероны–Малика некорректна. Кромка моделируется как сингулярная функция гельдер-непрерывного класса. Установлено существование слабого (обобщенного) решения с начальными данными в классе гельдер-непрерывных функций. Доказательство основано на получении внутренних априорных оценок для первых производных (или констант Липшица) для так называемых потенциальных функций, которые сохраняют регулярные свойства на кромках. Обобщенные решения удовлетворяются в сильном смысле в точках, где коэффициент диффузии не равен нулю. На кромках решение понимается в смысле выполнения некоторых интегральных соотношений.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 99-01-01066).

Указано на результаты численных расчетов, где в начальный момент на модель кромки с сингулярностью в виде гельдер-непрерывной функции накладываются функции шумов различных типов. В результате кромка сохраняется, а шумы исчезают, что решает проблему Пероны–Малика об одновременном подавлении шумов и сохранении бесконечных градиентов в анизотропной диффузии. Указано на автомодельные решения уравнений анизотропной диффузии, которые зависят от переменной, равной отношению пространственной координаты к квадратному корню времени. Эти решения играют важную роль при изучении асимптотических свойств решений задачи Коши.

1. Модель сохранения кромки. Рассмотрим уравнение в частных производных параболического типа с одной пространственной переменной

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1.1}$$

где k – положительный коэффициент теплопроводности, который стремится к нулю, когда $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \longrightarrow \infty$. Далее нижние индексы t и x всюду обозначают частные производные по соответствующим независимым переменным. В связи с (1.1) рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{(u_x)^m}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1.2}$$

где при $m > 0$ коэффициент теплопроводности удовлетворяет указанному свойству. Будем искать автомодельное решение уравнения (1.2) в виде

$$u(t, x) = u(\xi).$$

Здесь $\xi = (t + 1)^\alpha x$ – автомодельная переменная. Имеем следующие формулы для частных производных:

$$u_t = \alpha x(t+1)^{\alpha-1}u', \quad u_x = (t+1)^\alpha u',$$
$$u_{xx} = (t+1)^{2\alpha}u''.$$

Подставляя эти выражения в (1.2), приходим к уравнению

$$\alpha\xi u' = \frac{u''}{(u')^m}, \tag{1.3}$$

где $\alpha = 1/(m-2)$. Уравнение (1.3) интегрируется

$$u'(\xi) = \left(\frac{2}{\alpha m}\right)^{\frac{1}{m}}\left(\frac{2}{\alpha m}(u'(0))^{-m} - \xi^2\right)^{-1/m}. \tag{1.4}$$

Если $m > 2$, то, предполагая $u'(0) > 0$, получаем решение с бесконечными $u'(\xi)$ при некоторых конечных значениях ξ (положительных и отрицательных). Обозначая $C^2 = \frac{2}{\alpha m}(u'(0))^{-m}$, можно получить следующее разложение по степеням $(C - \xi)$ в окрестности точки сингулярности:

$$u(\xi) = B + (\alpha mC)^{-\frac{1}{m}}\frac{m}{m-1}(C-\xi)^{1-\frac{1}{m}} +$$
$$+ \frac{(\alpha mC)^{-\frac{1}{m}}}{2mC}\frac{m}{m-2}(C-\xi)^{2-\frac{1}{m}} + O\left((C-\xi)^{3-\frac{1}{m}}\right).$$

Итак, если в начальный момент времени имеется особенность в виде гельдер-непрерывной функции типа $\xi^{1-\frac{1}{m}}$, то она сохраняется во времени в силу автомодельных решений. Это будем называть аналитической моделью сохранения кромки посредством уравнений нелинейной диффузии.

Вернемся к исходному уравнению (1.1) и продифференцируем обе части уравнения по x. Получаем уравнение в дивергентной форме, автономное по u_x

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(p)\frac{\partial p}{\partial x}\right), \tag{1.5}$$

где введено обозначение $u_x = p$.

Если $k(p) = p^m$, то такие уравнения при $m \in (0, \infty)$ описывают движение через пористое вещество или так называемую медленную диффузию, (см. [4–7]). В этом случае коэффициент диффузии стремится к нулю при $p \longrightarrow 0$, уравнение вырождено в точках, где $p = 0$. Подробный список работ для случая $m > 0$ можно найти в [8, 9]. При $-1 < m < 0$ коэффициент диффузии становится неограниченным при $p \longrightarrow 0$. Такие уравнения возникают в моделях физики плазмы при сильных внешних магнитных полях (так называемая быстрая диффузия). Теория этих уравнений разработана [10–14]. При $-2 < m \le -1$ коэффициент $k(p) = p^m$ расчет еще быстрее когда $p \longrightarrow 0$. Такие уравнения рассматриваются в моделях расширения термоэлектронного облака, в газовой кинетике, в кинетике ионного обмена и в модели конвекционной диффузии плазмы в поперечном поле. Соответствующую теорию можно найти в [12, 15–20]. Остается, наконец, заметить, что при $m \in (-\infty, -2)$ мы имеем проблему Пероны–Малика, т.е. рассматриваемую в данной статье область исследования, связанную с сохранением кромок посредством анизотропной диффузии.

2. Задача с начальными условиями. Остановимся на свойствах решения задачи Коши для уравнения (1.2). Для нас важную роль будет иметь так называемая потенциальная функция V, которая вводится следующим образом:

$$u = V|V|^{-\frac{1}{m}} + \bar{u}_0, \tag{2.1}$$

здесь x_0 – точка сингулярности для начальных данных и $\bar{u}_0 = u(x_0)$. Для возрастающих функций из гельдер-непрерывного класса с показателем $\frac{m-1}{m}$ функция V является регулярной в окрестности точки x_0. Она монотонно возрастает и равна нулю в точке x_0. Из (1.2) и (2.1) получим, что потенциальная функция V удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{V\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{1}{m}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^m}. \tag{2.2}$$

По методу работы [21] получены внутренние априорные оценки для производной потенциальной функции в задаче с начальными условиями. Откуда следует, что в случае решений, имеющих одну точку сингулярности, справедливо существование слабого решения задачи Коши для уравнения (1.2) с начальными данными в классе гельдер-непрерывной функции.

Можно установить, что в тех точках, где $u_x \neq \infty$, обобщенное решение является решением и в сильном смысле. Был проведен ряд численных расчетов, в которых решалось уравнение (1.2) с начальными данными в виде сингулярной функции, на которую накладывались шумы различных видов. Полученные результаты показывают одновременное подавление шумов с сохранением кромок, если под кромкой понимать сингулярность гельдеровского типа. Это решает проблему Пероны–Малика.

3. Некоторые обобщения. Рассмотрим дивергентную форму параболического уравнения, где

$$k = k(u_x) = \frac{1}{(u_x)^m}$$

при $m > 2$. Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{(u_x)^m}\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

откуда, очевидно, выводится

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{(1-m)}{(u_x)^m}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{3.1}$$

Если считать

$$k = k(|u_x|) = \frac{1}{|u_x|^m},$$

то, согласно (3.1), получаем при $m > 2$ отрицательный коэффициент при эллиптическом операторе, т.е. неустойчивость по Адамару задачи с начальными условиями.

Рассмотрим уравнение (1.2) в случае цилиндрической симметрии

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{(u_r)^m}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right), \tag{3.2}$$

где r – радиус. Для (3.2) имеем автомодельное решение

$$u(t, r) = f(\xi),$$

где $\xi = (t+1)^\alpha r$. Окончательно приходим к уравнению

$$f'' = \alpha\xi(f')^{m+1} - \frac{f'}{\xi},$$

где $\alpha = 1/(m-2)$. Данное уравнение уже не дает первый интеграл, как это было для (1.3). Однако можно убедиться, что для конечных ξ имеет место сингулярность, аналогичная плоскому случаю. В [22] рассматриваются бигармонические операторы в проблеме Пероны–Малика. В связи с этим рассмотрим уравнение четвертого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{(u_x)^m}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$$

и будем искать автомодельные решения в виде

$$u(t, x) = \varphi(\xi),$$

где $\xi = (t+1)^\alpha x$. Приходим к уравнению

$$\alpha\xi\varphi' = \frac{\varphi^{\mathrm{IV}}}{(\varphi')^m},$$

где $\alpha = 1/(m-4)$. Мы здесь не получаем первого интеграла, как это было для (1.3). Однако, можно установить, что для конечных ξ имеет место сингулярность гельдеровского типа

$$(C-\xi)^{1-\frac{3}{m}}.$$

Наконец, заметим, что уравнение (1.1) имеет еще один класс автомодельных решений $u(x, t) = F(\xi)$, где $\xi = \frac{x}{\sqrt{t+1}}$. Для температурных волн на такие решения указано еще в [5], а подробный анализ дан в [7]. К ним асимптотически сходятся решения задачи Коши, о чем подробно изложено в [17] и цитированных там статьях. В нашем случае для (1.5) имеем уравнение

$$k(F(\xi))F''(\xi) + k'(F(\xi))(F'(\xi))^2 + 1/2\xi F'(\xi) = 0.$$

Заключение. Сформулирована область исследования нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа с коэффициентом диффузии, зависящим от градиента в приложении к обработке изображений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Perona P., Malik J.* Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion // IEEE Trans. On Pattern Anal. And Mach Intel. 1990. V. 12. № 7.
2. *Catté F., Lions P.-L., Morel J.-M., et al.* Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion // SIAM J. Numer. Anal. 1992. V. 29. № 1.
3. *Alvarez L., Lions P.-L., Morel J.-M.* Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion. II // SIAM J. Numer. Anal. 1992. V. 29. № 3.
4. *Баренблатт Г.И.* О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде // ПММ. 1952. Т. 16. Вып. 1.
5. *Зельдович Я.Б., Компаниец А.С.* К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры. Сборник, посвященный семидесятилетию акад. А.Ф. Иоффе. М.: Изд-во АН СССР, 1950.
6. *Patte R.E.* Diffusion from an instantaneous point source with concentration dependent coefficient // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1959. V. 12.
7. *Atkinson F.V., Peletier L.A.* Similarity profiles of flows trough porous media // Arch. Rat. Mech. Anal. 1971. V. 42.
8. *Peletier L.A.* The porous media equations // Applications of Nonlinear Analysis in Physical Sciences // Ed. H. Amann. Boston: Pitman. 1981.
9. *Aronson D.G.* The porous medium equation // Some problems in nonlinear diffusion / Eds. Fasano A., Primicero M. Lecture notes in mathemaics. V. 1224. Berlin: Springer, 1986.
10. *Aronson D.G., Benilan Ph.* Régularité des solutions de l'équation des milieux poreux dans $\mathcal{R}^N$ Paris: C.r. Acad. Sci. 1979. № 228.
11. *Berryman J.G., Holland C.J.* Stability of the separable solution for fast diffusion // Archs ration. Mech. Anal. 1980. V. 74.
12. *Berryman J.G., Holland C. J.* Asymptotic behavior of the nonlinear diffustion equation $n_t = (n^{-1}n_x)_x$ // J. Math. Phys. 1982. V. 13. № 6.
13. *Bertsch M.* Asymptotic behavior of solutions of a nonlinear diffusion equation // SIAM. J. Appl. Math. 1980. V. 42.
14. *Herrero M.A., Pierre M.* The Cauchy problem for $u_t = \Delta u^m$ when $0 < m < 1$ // Trans. Am. Math. Soc. 1985. V. 291.
15. *Esteban J.R., Rodrigues A., Vazquez J.L.* A nonlinear heat equation with singular diffusivity // Communs partial diff. Eqns. 1988. V. 13.
16. *Duijn C.J. van, Gomes S.M., Zhang H.* On a class of similarity solutions of the equation $u_t = (u^{m-1}u_x)_x$, with $m > -1$ // I. M.A.J. appl. Math. 1988.
17. *Zhang H.* Large time behavior of the maximal solution of equation $u_t = (u^{m-1}u_x)_x$ with $-1 < m \leq 0$ // Differential and Integral Eqautions. 1993. V. 6. № 3.
18. *Zhang H.* On a nonlinear singular diffusion problem: convergence to traveling wave // Nonlinear Anal. T. M. and A. 1992. V. 19. № 12.
19. *Takáč P.* A fast diffusion equation which generates a monotone local semiflow I: local existence and uniqueness // Diff. Integral Equations. 1991. V. 4.
20. *Takáč P.* A fast diffusion equation which generates a monotone local semiflow II: global existence and asymptotic behavior // Diff. Integral. Equations. 1991. V. 4.
21. *Aronson D.G.* Regularity properties of flows though porous media // SIAM J. Appl. Math. 1969. V. 17. № 2.
22. *Proesmans M., Pawels E.J., van Gool.* Coupled geometry-driven diffusion equations for low-level vision // Ed. Geometry–Driven Diffusion in Computes Vision / Ed. B. TerHaar-Romeny Kluwer, 1994.