

### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А.В. ЛОТОВ, А.А. ПЕТРОВ, И.Г. ПОСПЕЛОВ, А.А. ШАНАНИН

МОСКВА

Методы математического описания и анализа экономических систем в Вычислительном центре АН СССР начали развиваться с 1967 г., когда по инициативе А.А. Дородницына и Н.Н. Моисеева был создан сектор "Математическая экономика". К теперешнему времени это направление развернулось в широкий фронт исследований, которые ведут, по крайней мере, семь отделов ВЦ АН СССР. Мы дадим краткий обзор состояния того направления, которое развивается в отделе "Математическое моделирование экономических систем".

Один из авторов десять лет назад имел повод рассказать о состоянии исследований этого направления. С тех пор кое-что изменилось и можно уже говорить не об одном, а, по крайней мере, о трех направлениях исследований. Соответственно, можно выделить три группы результатов, каждая из которых характеризует свое направление. Все они объединены общей идеей, общим подходом к описанию и анализу экономических систем. Суть его состоит в следующем. Экономика изучается системно как эволюционирующее организеское целое. Это значит, во-первых, что, изолируя, выделяя для изучения некоторую часть экономики, мы должны оценивать, можно ли нарушать те связи, которые мы обрываем. Во-вторых, мы должны строить не просто разные модели, но систему моделей.

Редакционная коллегия:

доктор физ.-матем. наук А.А. Абрамов,

доктор физ.-матем. наук А.А. Петров,

доктор физ.-матем. наук Ю.Д. Шмыглевский,

доктор физ.-матем. наук Л.В. Шуршалов

Сборник включает доклады конференции "Проблемы прикладной математики и информатики", состоявшейся в Вычислительном центре АН СССР 3-4 декабря 1990 г. и посвященной восьмидесятилетию выдающегося ученого, Героя Социалистического Труда, академика Анатолия Алексеевича Дородницына. Во вторую часть сборника вошли доклады по информатике.

Научное издание

Каждая из них может отражать отдельные особенности, разные проявления функционирования и развития экономики. Но вместе модели должны составлять систему, должны быть взаимосвязанными, перекрывать одна другую.

Основу системы моделей образует полная система уравнений материальных и финансовых балансов процесса общественного воспроизводства. Уравнения материальных балансов связывают изменение запасов продуктов и ресурсов у экономических агентов с выпусками и затратами продуктов экономическими агентами. Уравнения финансовых балансов связывают изменения активов и пассивов экономических агентов с потоками их доходов, расходов, сбережений, кредитов и т.д. Следствием уравнений балансов является основной баланс кредитно-финансовой системы, который выражает сохранение в каждый момент времени суммы всех активов и пассивов всех экономических агентов в системе.

Система уравнений балансов вполне отражает материальный и финансовый аспект процесса общественного воспроизводства: взаимодействие процессов производства материальных благ, процессов обменов благами, процессов распределения благ и их потребления. Они дают возможность описать в единстве материальные потоки и соответствующие им финансовые потоки, запасы основных и оборотных фондов и корреспондирующие им активы и пассивы экономических агентов. В общем, — то, что Маркс обозначал соотношением —  $D-T-D'$  —.

Система уравнений балансов незамкнута. В правые части уравнений входят действия экономических агентов. Действия экономических агентов определяются их интересами, их состоянием, информированностью о состоянии экономической системы и некоторыми ограничениями, которые согласуют действия экономических агентов. Они называются экономическими механизмами регулирования, формируются в процессе развития системы и обеспечивают согласованность материальных и финансовых потоков, запасов, активов и т.п.

Таким образом, возникает проблема замыкания системы уравнений балансов. Это — главная проблема системного анализа экономики. Для каждого типа экономической системы она решается по-своему, потому что тип экономической системы определяется именно экономическими механизмами регулирования и согласованности интересов экономических агентов.

Первая группа результатов содержит решение проблемы замыкания в случае рыночной экономики и в случае плановой административно регулируемой экономики на различных конкретных моделях, с разной степенью детализации отражающих экономику того или другого типа. В рамках единой теории удалось отразить основные качественные особенности эволюции экономик разного типа. В случае рыночной экономики исследованы: зависимость темпов роста производства от структуры экономических механизмов регулирования и темпов роста первичных ресурсов [1]; возникновение циклов деловой активности, инфляционного роста цен и структурной безработицы при дефиците предложения трудовых ресурсов [1]; возникновение явлений стагфляции (одновременного роста цен и безработицы) при дефиците предложения природных ресурсов [1]; структурные сдвиги в экономике, вызванные заменой трудоемких технологий энергоемкими при дефиците предложения трудовых ресурсов [2]; влияние международной торговли и колебаний курсов валют на экономическое развитие стран — торговых партнеров [3]; влияние государственного регулирования на характер экономического развития [4].

В случае плановой административно регулируемой экономики исследованы: влияние процедур планирования на материально-финансовую сбалансированность экономики, нарушение сбалансированности вследствие перенапряженных планов [5]; влияние кооперативного сектора на характер развития экономики [6].

Последний год накопленный опыт моделирования и анализа экономики используется для оценки последствия крупных экономических решений [7]. В качестве иллюстрации на рис. 1–3 приведе-

ны некоторые результаты расчетов возможных последствий "шоковой терапии" экономики СССР, которая обсуждалась в апреле 1990 г. Кривые показывают влияние на процесс роста цен снижения государственных расходов, уровня налогообложения чистых доходов предприятий и степени компенсации роста цен населению с фиксированными доходами за счет выплат из государственного бюджета.

На рис. 1 показана зависимость уровня инфляции – индекса цен по отношению к цене 1988 г. – от конечного уровня государственного потребления. В окне, в правом верхнем углу рис. 1 и 2 кривые изменения уровня государственного потребления, отнесенного к уровню 1988 г. и выраженного в процентах. Видно, что рост цен критическим образом зависит от снижения государственного потребления: если снизить последнее меньше, чем наполовину (при данной ставке налога  $n = 0.3$ ), то инфляция становится неуправляемой. Инфляцию можно регулировать ставкой налога на добавленную стоимость. На рис. 2 кривая 1 соответствует  $n = 0.3$  (на рис. 1 эта кривая отмечена цифрой 3), кривая 3 соответствует  $n = 0.4$ , а кривая 3 –  $n = 0.5$ . Индексация фиксированных доходов населения, источником которой служит государственный бюджет, наоборот подстегивает инфляцию. На рис. 3 кривая 1 соответствует отсутствию индексации (эта кривая на рис. 1 тоже помечена цифрой 1), кривая 2 соответствует 20% компенсации роста цен, а кривая 3 – 50% компенсации.

Варьируя ставку налога и уровень индексации фиксированных доходов, можно добиваться наиболее благоприятного течения переходных процессов.

Проблема замыкания системы уравнений балансов тесно связана с общей проблемой обоснования моделей экономических систем. Только что обсуждавшиеся модели выражаются макросоотношениями относительно макропоказателей, таких, как валовый продукт, совокупная добавленная стоимость, суммарная занятость и т.п. При каких условиях законно использовать подобные величины для описания экономических систем? Вопрос составляет часть общей

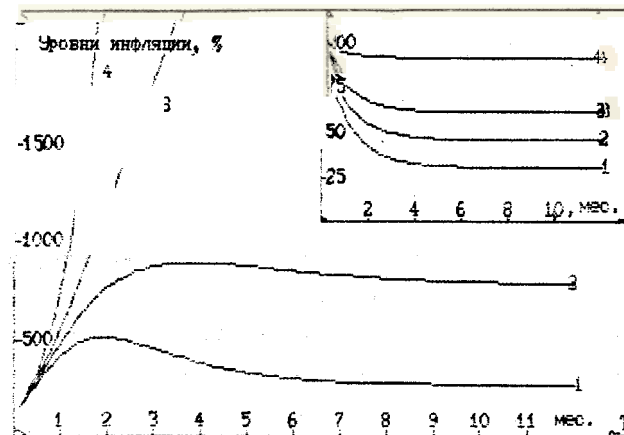


Рис. 1

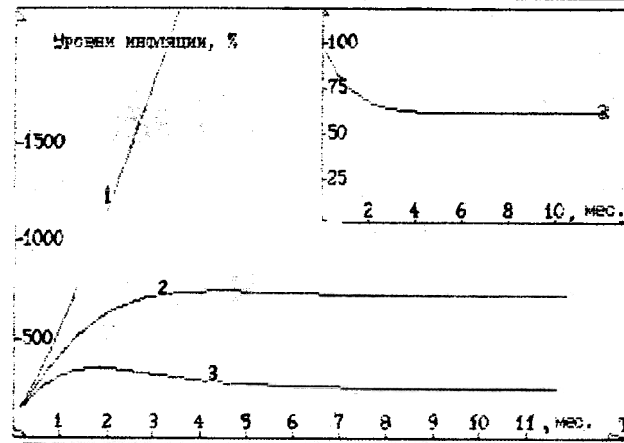


Рис. 2

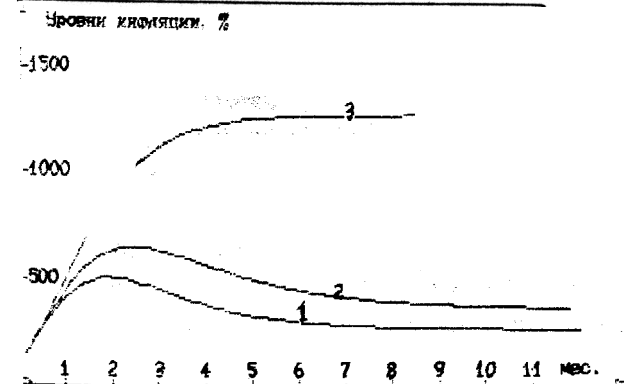


Рис. 3

проблемы агрегирования микроэкономических процессов и отношений в макросоотношения относительно макропоказателей [8]. Проблема интенсивно исследуется и уже получены обнадеживающие результаты. Построено динамическое микроописание рынка товара [9], которое позволило объяснить, как возникает цена товара на рынке. Развитая теория производственных функций, представляющих распределение мощностей по технологиям [1, 10-12]. Здесь мы, для примера, кратко рассмотрим некоторые вопросы агрегирования лентевской схемы затрат-выпуск с неоклассическими функциями. Пусть в рассматриваемой экономической системе выпускаются  $N$  продуктов. Обозначим  $X^i > 0$  выпуск  $i$ -го продукта, он выражается через затраты  $X^i > 0, i = 1, \dots, N$  других продуктов и затраты  $L^k > 0, k = 1, \dots, M$  первичных ресурсов с помощью производственной функции

$$X^i = F^i(X^1, \dots, X^N; L^1, \dots, L^M), i = 1, \dots, N,$$

Если обозначить  $X^i > 0$  конечный выпуск  $i$ -го продукта, то уравнения схемы затрат-выпуск записываются в виде

$$X_0^i > X^i - \sum_{j=1}^N X^j, i = 1, \dots, N, \\ N L^k > L^k, k = 1, \dots, M, \quad (1)$$

где  $L^k$  — заданные количества первичных ресурсов.

Развита равновесная теория агрегирования [13], которая просвещает действие закона стоимости в рыночной экономике. Пусть продукты образуют так называемую отделимую группу товаров. Это значит, что пропорции спроса на эти товары не зависят от цен на какие-либо другие товары. Пусть заданы функции спроса на товары  $X^i(d^1, \dots, d^N)$ , которые зависят по определению отделимой группы только от цен на эти товары, и обратные функции спроса  $P^i(X^1, \dots, X^N)$ . Отделимость продуктов означает, что пропорции спроса на них  $X^1, X^2, \dots, X^N$  определяются лишь пропорциями цен  $d^1, d^2, \dots, d^N$ . По-

Значит, если существует индекс цен, то дифференциальная форма из обратных функций спроса допускает интегрирующий множитель. Если существует индекс цен, то существует и индекс продуктов, и дифференциальная форма  $\sum_{i=1}^N X^i(d) dp^i$  допускает интегрирующий множитель  $F(\lambda)$ . Показано при определенных условиях на функции  $X^i$  [14] и обратное утверждение: если соответствующая дифференциальная форма допускает интегрирующий множитель, то существует

$$q(P^1(\lambda), \dots, P^N(\lambda)) dF = \sum_{i=1}^N P^i(\lambda) dX^i,$$

находим, что

Множкая каждое из равенств на соответствующий  $dX^i$  и складывая,

$$q \frac{\partial F}{\partial X^i} = p^i, \quad (3)$$

Так как в точке экстремума выполнены условия (2), то

$$p^i - \frac{F}{\sum_{i=1}^N p^i X^i} \frac{\partial F}{\partial X^i} = 0,$$

Необходимые условия экстремума дают

$$q(d) = \min_{X^i > 0} \frac{F(X)}{\sum_{i=1}^N p^i X^i}, \quad (2)$$

как

$$qF > \sum_{i=1}^N p^i X^i + q(P^1(\lambda), \dots, P^N(\lambda)) = \sum_{i=1}^N P^i(\lambda) X^i,$$

ставим задачу об индексе продуктов  $F(X^1, \dots, X^N)$  и двойственном ему индексе цен  $q(p^1, \dots, p^N)$ . Не обходящая всех свойств индексов продуктов и цен, отметим только одно из них, которое имеет очевидный экономический смысл:



индекс продуктов, т.е. потребительский спрос агрегируется в скалярный показатель.

Теперь вернемся к уравнениям межотраслевого баланса (1) и поставим задачу их агрегирования. Конечные продукты  $X_0^i$  разнородны, поэтому естественно измерить их с помощью индекса продуктов  $F(X)$ , если он существует. Процедура агрегирования баланса (1) основана на принципе эффективности:

найти  $\max F(X_0)$  при условиях (1).

Решение задачи дает зависимость  $F(X_0^1(L), \dots, X_0^N(L))$ , где  $L = (L_1, \dots, L_M)$  агрегированного выпуска от первичных ресурсов, т.е. производственную функцию – агрегированное представление межотраслевого баланса (1). Показано, что процедура агрегирования реализуется как рыночные механизмы равновесного распределения ресурсов в условиях совершенной конкуренции. Если  $\bar{q} = (q_1, \dots, q^N)$  – цены на выпускаемые конечные продукты  $X_0^i$ ;  $q^0(q) = (q^1, \dots, q^N)$  – цены на соответствующий индексу продуктов  $F(X)$ , а  $\bar{s} = (s^1, \dots, s^M)$  – цены на первичные ресурсы  $L_k$ , то функция преобразования конечных продуктов на рынке  $X_0^i(q, s)$  удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial F(X_0^1(q, s), \dots, X_0^N(q, s))}{\partial X_0^i} = q^i \quad i = 1, \dots, N.$$

Сравнивая этот результат с выражением (3), нетрудно заметить, что при рыночных ценах на конечные продукты  $q^i = p^i$  структура предложения  $X_0^1 : X_0^2 : \dots : X_0^N$  совпадает со структурой спроса  $X^1 : X^2 : \dots : X^N$ , который и порождает индекс  $F$ . Следовательно, рынок конечных продуктов при этих ценах находится в равновесии и оказывается, что балансовая схема (1) допускает агрегированное представление именно в этих условиях.

Этот результат, так же как и другие результаты в теории агрегирования микроэкономических процессов и отношений, имеет основополагающее значение. Во-первых, они устанавливаются,

что проблема обоснования и замыкания макроописания экономической системы сводится к нетривиальным математическим задачам. Например, выяснено, что проблема агрегирования экономических описаний связана с известной задачей Картана о приведении дифференциальной формы к наименьшему числу переменных или с задачей обращения и характеристизацией преобразования Ратона по не-полным данным. Во-вторых, макроописание экономических систем законны лишь при определенных условиях – определенных соотношениях экономических систем. В частности, нельзя считать неизменной, раз и навсегда заданной номенклатуру отраслей и продуктов в самой балансовой схеме (1). Открывается перспектива построения макромоделей переменной структуры на основе синтеза макроописания экономических систем и теории агрегирования микроописаний.

Когда мы говорим о замыкании макроописания процесса эволюции экономической системы, мы молчаливо предполагаем, что зафиксированы некоторые параметры, которые выражают действия выделенных экономических агентов, олицетворяющих крупные общественные институты: государственные органы, партии, организации и общественные движения. Они выражают интересы социальных групп и общественной системы в целом. Нет никакого противоречия в том, что мы отделим интересы экономических агентов от интересов групп, в которые входят те же экономические агенты. Обществу устроено неравномерно сложно. Групповые интересы осознаются иначе, чем индивидуальными, и действия ради тех или других интересов относятся к разным проявлениям общественного бытия людей. Так или иначе, типичная задача макроэкономического анализа – оценить варианты экономического развития с точки зрения интересов основных социальных групп и эффективности системы в целом. Так возникает задача оценки по многим критериям вариантов экономического развития, которые определяются допустимыми комбинациями действий выделенных экономических агентов. Эта задача порождает третье направление исследования.

Задача многокритериальной оценки вариантов экономического развития решается методом обобщенных множеств достижимости [15], общность которого выходит за рамки экономических приложений. Это метод отображения множества допустимых управлений динамической системы в множество допустимых значений критериев в силу уравнений системы и определения критериев. Если система такова, что выпуклое множество допустимых управлений отображается в выпуклое множество возможных значений критериев, то можно предложить методы эффективного построения границы множества возможных значений критериев. Развита теория обобщенных множеств достижимости (ОМД) в линейном и выпуклом случаях, разработаны эффективные численные методы аппроксимации выпуклых ОМД многогранниками и предложены удобные методы наглядного представления многогранных тел в многомерном пространстве их двух- и трехмерными сечениями. Задача аппроксимации неявно заданного выпуклого тела в пространстве с заданным числом измерений последовательностью многогранников до заданной точности отнюдь не тривиальна, потому что в интерактивном процессе вычислений множатся гиперплоскости, среди которых многие становятся несущественными и поэтому должны быть отброшены. Ошибки округления могут значительно исказить картину, превращая существенные гиперплоскости в несущественные и наоборот. Построенные устойчивые эффективные алгоритмы распознают такого рода ситуации и дают возможность решать задачи большой размерности.

В результате диалоговая система анализа качества решений по многим критериям, которая дает возможность выделенными экономическим агентам обозреть все множество допустимых комбинаций значений критериев, анализировать его неформальным образом, использовать эту информацию в переговорах с целью достижения компромисса и оценивать последствия принятого компромисса. Система использовалась для исследования многих проблем. Были, например, рассмотрены: выбор варианта технической системы, за-

грязнение Нью-Йоркской бухты, переход к экологически чистым технологиям и т.д.

Все три направления исследований составляют общий подход к математическому описанию и анализу экономических систем, который мы называем системным анализом развивающейся экономики. Можно сказать, что в настоящее время разработаны теоретические основы нашего подхода, и мы уже готовы использовать разработанные методы и накопленный опыт для прикладных исследований – оценки долгосрочных последствий крупных экономических решений. Но актуальной, по нашему мнению, остается задача совершенствования математической теории экономических систем.

### Л и т е р а т у р а

1. П е т р о в А.А., П о с п е л о в И.Г. Системный анализ развивающейся экономики. I – III // Изв. АН СССР, Техн. кибернетика, 1979, № 2, С. 18–27; 1979, № 3, С. 28–38; № 4, С. 11–23.
2. К р и ш т а л ь В.В., П е т р о в А.А., П о с п е л о в И.Г. Системный анализ развивающейся экономики: исследование влияния энергетики на экономику. I, II // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1983, № 4, С. 17–24; 1984, № 2, С. 3–12.
3. М о л д а ш е в а Г.Б., П е т р о в А.А., П о с п е л о в И.Г. Математическая модель международной торговли и валютного обмена // Модели и алгоритмы программного метода планирования сложных систем. М.: ВЦ АН СССР, 1979, С. 51–71.
4. К р у т о в А.П., Р о м а н к о А.В. Влияние государственных расходов на характер развития рыночной экономики // Математическое моделирование: Процессы в сложных экономических и экологических системах. М.: Наука, 1986. С. 19–45.
5. К р у т о в А.П., П е т р о в А.А., П о с п е л о в И.Г. Системный анализ экономики: модель общественного воспроизводства в плановой экономике // Математическое модели-

рование: Методы описания и исследования сложных систем. М.: Наука, 1989. С. 200–231.

6. Крутов А.П., Петров А.А., Поспелов И.Г. Математическая модель воспроизводства в централизованной плановой экономике с товарно–денежными отношениями. М.: ВЦ АН СССР, 1989, 50 с.

7. Бузин А.Ю., Крутов А.П., Петров А.А., Поспелов И.Г. Оценка последствий экономической реформы и крупных технических проектов для экономики СССР. М.: ВЦ АН СССР, 1990, 44 с.

8. Петров А.А., Шананин А.А. Системный анализ экономики: проблема агрегированного описания экономических отношений // Математическое моделирование: Методы описания и исследования сложных систем. М.: Наука, 1989. С. 121–156.

9. Поспелов И.Г. Динамическая модель рынка // Экономика и матем. методы. 1988, № 3. С. 497–508.

10. Шананин А.А. Исследование одного класса производственных функций, функций прибыли, возникающих при макроописании экономических систем. I, II // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1984, № 52, С. 1799–1811; 1985, № 1, С. 53–65.

11. Оленев Н.Н., Петров А.А., Поспелов И.Г. Модель процесса изменения мощности и производственная функция отрасли хозяйства // Математическое моделирование: Процессы в сложных экономических и экологических системах. М.: Наука, 1986, С. 46–59.

12. Хенкин Г.М., Шананин А.А. Теорема Бернштейна и преобразование Радона. Приложение к теории производственных функций // Вопросы кибернетики: Математические вопросы томографии. М.: Наука, 1990, С. 200–236.

13. Шананин А.А. К равновесной теории агрегирования. М.: ВЦ АН СССР. 1986. 40 с.

14. Шананин А.А. Об агрегации функций спроса // Экономика и матем. методы. 1989. Т. 25. № 6. С. 1095–1105.

## ПРОБЛЕМА АГРЕГАЦИИ ДИОФАНТОВЫХ УРАВНЕНИЙ

ДЖ.А. БАБАЕВ, С.С. МАРДАНОВ  
БАКУ

Задача агрегации системы диофантовых уравнений состоит в построении одного уравнения, имеющего такое же множество целых неотрицательных решений, что и заданная система. Основная проблема при агрегации заключается в получении эквивалентного уравнения, по возможности с меньшими значениями коэффициентов.

Предложен метод последовательной агрегации (уравнения агрегируются последовательно по два), в большинстве случаев превосходящий известные методы, т.е. обеспечивающий меньшие значения коэффициентов эквивалентного уравнения. Предложен метод построения уравнения, имеющего единственное целое неотрицательное решение, совпадающее с заданным и обеспечивающее получение минимального возможного значения максимального коэффициента уравнения. Предложенный метод решает задачу одновременной агрегации (эквивалентное уравнение строится за один шаг).

### Введение

В настоящей работе под термином диофантовые уравнения имеются в виду линейные алгебраические уравнения с целочисленными коэффициентами, правыми частями и решениями.