УДК 330.115

А.А. ШАНАНИН

К ТЕОРИИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

1. Введение

В экономико-математических моделях при описании производственной системы явно или неявно используется понятие производственной единицы. Производственной единицей называется некоторый выделенный элемент хозяйства, внутренняя структура которого не рассматривается и функционирование которого описывается формально производственной функцией, выражающей связь между размером выпуска продукции и используемыми ресурсами. При таком описании необходимо либо постулировать независимость производственной функции от изменений "внутреннего состояния" элемента, происходящих при изучаемых в модели социально-экономических процессах, либо указывать способ учета этой зависимости.

В настоящее время в эконометрии для построения производственной функции используется подход, общая схема которого изложена, например, в работе [4]. Согласно этой схеме, чтобы построить производственную функцию, надо: 1) зафиксировать методы оценки затрат ресурсов и выпуска продукции, 2) выбрать класс функций, среди которых следует искать производственную функцию и 3) указать принципы, по которым она отыскивается. В эконометрических моделях производственная функция обычно отыскивается среди функций Кобба – Дугласа или CES функций, параметры которых оцениваются по временным рядам затрат ресурсов и выпуска продукции (например, с помощью метода наименьших квадратов). При использовании такого подхода неизбежно возникают следующие трудности. Во-первых, неизвестно, можно ли так построенную производственную функцию использовать для моделирования будущего развития системы, потому что нет оснований считать, что она слабо зависит от изменений экономических механизмов, которые могут сопутствовать изучаемым социально-экономическим процессам. Иными словами, не обоснована экстраполяция производственной функции, построенной по статистическим данным о производственной единице, управляемой одними экономическими механизмами, на случай, когда эта производственная единица управляется изменившимися экономическими механизмами. Во-вторых, неизвестно, в каком классе функций искать статистическими методами производственную функцию.

В течение последнего десятилетия предпринимались различные попытки ответить на эти вопросы. В работах [6-8] предложен способ построения производственной функции и использования ее для описания хозяйства классического рыночного типа. Этот способ предполагает необходимость сформулировать гипотезы о внутренней структуре производственной единицы и экономических механизмах, управляющих производственной системой. Тем самым указываются границы применимости получаемого описания функционирования производственной единицы. Для моделей рыночного хозяйства эти гипотезы распадаются на две группы. Первая группа гипотез дает описание внутренней структуры (микроописание) производственной единицы и накладывает ограничения на класс рассматриваемых экономических механизмов. Исходя из этой группы гипотез, можно доказать существование производственной функции, учитывающей зависимость производства от изучаемых социально-экономических процессов. Вторая группа гипотез, дополнительно описывающая экономические механизмы, позволяет установить вид производственной функции.

В работе [5] предпринята попытка уточнить само понятие производственной функции и исследовать ее свойства. С этой целью была построена модель отрасли, выпускающей однородный продукт и использующей в процессе производства два различных производственных фактора. Была построена производственная функция такой отрасли и изучены ее свойства. Заметим, что производственная функция отрасли, использующей единственный производственный фактор, которая рассматривалась в работах [6, 7], формально совпадает с производственной функцией, построенной в работе [5]. Производственная функция отрасли, использующей несколько производственных факторов, которая рассматривалась в работах [6, 8], является частным случаем производственной функции, рассматривавшейся в работе [5].

В предлагаемой статье приведен обзор результатов работы [5] и содержатся новые результаты, развивающие подход работы [5].

2. Модель отрасли и ее производственная функция

Будем рассматривать отрасль, выпускающую однородный продукт и использующую при этом n видов факторов производства.

Предположим сначала, что отрасль состоит из m производственных единиц. Будем характеризовать i-ю производственную единицу максимально возможным выпуском продукта v_i в единицу времени и необходимыми для выпуска единицы продукта материальными затратами $\vec{y}_i = \{y_{ij} \mid j = 1, \dots, n\}$. В работе [5] предполагается, что можно строить производственные единицы, которые в процессе производства будут использовать факторы производства в разных пропорциях, но, когда производственная единица уже построена, нормы материальных затрат и величина максимального выпуска продукта в единицу времени больше не изменяются.

Предполагается, что производственными единицами управляют из соображений рентабельности. Пусть $p_0 > 0$ – цена единицы выпускаемого продукта, а $p_1 \ge 0, \dots, p_n \ge 0$ – цены используемых факторов производства. Тогда если

$$p_0 - \sum_{j=1}^{n} p_j y_{ij} > 0,$$

то i-я производственная единица должна работать на полную мощность. Если

$$p_0 - \sum_{j=1}^{n} p_j y_{ij} < 0,$$

то i-я производственная единица не должна работать вообще. Однако остается неопределенной интенсивность функционирования i-й производственной единицы при условии, что

$$p_0 - \sum_{j=1}^{n} p_j y_{ij} = 0.$$

В работе [5] предлагается модель отрасли, в которой эта неопределенность оказывается несущественной. Будем характеризовать каждый технологический способ производства вектором $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, компоненты которого задают нормы материальных затрат на производство единицы продукта. Введем функцию распределения мощностей по технологическим способам производства

$$\nu(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \nu_i \, \delta(\vec{x} - \vec{y}_i),$$

где $\delta(\vec{x} - \vec{y}_i)$ – функция Дирака. Для построения модели заменим функцию распределения мощностей $\nu(\vec{x})$ ее усреднением по Соболеву

$$\xi(\vec{x}) = \int_{R_n} \nu(\vec{z}) \varphi(\vec{x} - \vec{z}) dz_1 \dots dz_n,$$

где $\varphi(\vec{x})$ – бесконечно дифференцируемая, неотрицательная, финитная функция такая, что

$$\int_{R_n} \varphi(\vec{x}) dx_1 \dots dx_n = 1,$$

и множество

$$D \doteq \{\vec{x} \mid \xi(\vec{x}) > 0\} \subset R_n^+ = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \ge 0,\ i = 1, \dots, n\}.$$

Такая аппроксимация при подходящем подборе функции $\varphi(\vec{x})$ пригодна для отрасли, состоящей из большого числа производственных единиц с близкими нормами материальных затрат на выпуск единицы продукта.

Итак, будем рассматривать модель отрасли, в которой множество возможных технологических способов $D \subset R_n^+$ имеет положительную меру Лебега, а функция распределения мощностей по технологическим способам производства $\xi(\vec{x})$ является измеримой, положительной на D функцией с суммируемым квадратом на любом измеримом, ограниченном подмножестве D.

При функционировании отрасли будут использоваться только неубыточные технологии, они принадлежат множеству

$$\hat{B}_0 = \{\vec{x} \mid \vec{x} \in D,\ \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \le p_0\}.$$

Прибыльные технологии, которые образуют множество

$$B_0 = \{\vec{x} \mid \vec{x} \in D,\ \sum_{i=1}^{n} p_i x_i < p_0\},$$

будут использоваться с максимально возможной интенсивностью.

Так как $mes(\hat{B}_0 \Delta B_0) = 0$, то при наших предположениях отрасль выпускает количество

$$Y = \int \xi(\vec{x}) dx_1 \dots dx_n = g_0(p_1/p_0, \dots, p_n/p_0)$$

продукта, затрачивая при этом количества

$$L_1 = \int x_1 \xi(\vec{x}) dx_1 \dots dx_n = g_1(p_1/p_0, \dots, p_n/p_0)$$

$$\dots (\vec{x}) dx_1 \dots dx_n \quad g_n(p_1/p_0, \dots p_n/p_0)$$

факторов производства. Исключив, если это возможно, из этих соотношений $p_1/p_0, \dots, p_n/p_0$, мы получим производственную функцию отрасли. Функция $g_0(p_1/p_0, \dots, p_n/p_0)$ называется функцией предложения продукта, а функции $g_1(p_1/p_0, \dots, p_n/p_0), \dots, g_n(p_1/p_0, \dots, p_n/p_0)$ – функциями спроса на факторы.

Чтобы обосновать корректность данного формального определения производственной функции, надо доказать существование, т.е. что одинаковым наборам факторов производства $(L_1, \dots, L_n)$ соответствуют одинаковые выпуски Y независимо от того, какие значения при этом принимают цены $p_0, \dots, p_n$.

...ществование производственной функции

В этом разделе будем предполагать, что D – ограниченное множество. Обозначим через $u(\vec{x})$ измеримую, ...ределенную на D функцию загрузки мощностей, удовлетворяющую ограничению $0 \le u(\vec{x}) \le \xi(\vec{x})$ почти всюду на D.

Тогда выпуск отрасли равен $\int_D u(\vec{x}) dx_1, \dots, dx_n$, а материальные затраты различных видов равны

$$\int_D x_1 u(\vec{x}) dx_1 \dots dx_n, \dots, \int_D x_n u(\vec{x}) dx_1, \dots, dx_n.$$

Рассмотрим задачу оптимизации в $L_2(D)$

$$\int_D u(\vec{x}) dx_1 \dots dx_n \to \sup, \tag{3.1}$$

$$0 \le u(\vec{x}) \le \xi(\vec{x}) \text{ почти всюду на } D, \tag{3.2}$$

$$\int_D x_i u(\vec{x}) dx_1 \dots dx_n \le L_i, \text{ где } i = \dots, n. \tag{3.3}$$

Через $L_2(D)$ обозначено пространство функций с суммируемым квадратом, определенных на множестве D.

Задача оптимизации (3.1)–(3.3) является задачей о максимальном количестве продукции, которое может выпустить рассматриваемая отрасль, имея в своем распоряжении материальные ресурсы в количестве $L_1, \dots, L_n$.

Для доказательства существования производственной функции потребуются три леммы.

ЛЕММА 1. Задача оптимизации (3.1)–(3.3) имеет решение в $L_2(D)$.

Доказательство. Введем обозначение

$$C = \{u(\vec{x}) \mid 0 \le u(\vec{x}) < \xi(\vec{x}) \text{ почти всюду в } D,\ u(\vec{x}) \in L_2(D)\}.$$

Очевидно, что C – выпуклое множество. Кроме того, C – ограниченное в $L_2(D)$ множество, так как для $u(\vec{x}) \in C$

$$\|u(\vec{x})\|_{L_2(D)} < \|\xi(\vec{x})\|_{L_2(D)} < \infty.$$

Докажем замкнутость C в $L_2(D)$, т.е. что для любой последовательности $\{u_k(\vec{x})\}$ такой, что $u_k(\vec{x}) \xrightarrow{L_2(D)} u_0(\vec{x})$ и $u_k(\vec{x}) \in C$ при всех k, предельная функция $u_0(\vec{x}) \in C$.

Так как из сильной сходимости в $L_2(D)$ следует слабая сходимость и так как $x_i \in L_2(D)$, то

$$\lim (\int x_i u_k(\vec{x}) dx_1 \dots dx_n) = \int_D x_i u_0(\vec{x}) dx_1 \dots dx_n$$

для любого $i = 1, \dots, n$. Поскольку

$$x_i u_k(\vec{x}) dx_1 \dots dx_n \le L_i,$$

$$\dots u \dots (\vec{x}) dx_1 \dots dx_n \le L_i,$$

здесь $\dots, n$.

Так как из $u_k(\vec{x}) \xrightarrow{L_2(D)} u_0(\vec{x})$ следует сходимость по мере $u_k(\vec{x}) \xrightarrow{mes} u_0(\vec{x})$, то из последовательности $\{u_k(\vec{x})\}$ можно выделить подпоследовательность $u_{k_l}(\vec{x}) \le \xi(\vec{x})$, сходящуюся к $u_0(\vec{x})$ поточечно почти всюду. Так как $u_{k_l}(\vec{x}) \le \xi(\vec{x})$ почти всюду в D, то из сходимости $\{u \dots (\vec{x})\}$ поточечно почти всюду в D следует, что $0 \le$ $\dots \le u \dots (\vec{x})$ в D почти всюду.

Следовательно, C замкнуто в $L_2(D)$.

Заметим, что функционал $\int\limits_D u(\vec{x})dx_1 \dots dx_n$ непрерывный, а следовательно, вогнутый. Воспользуемся теоремой о том, что непрерывный вогнутый функционал, определенный на гильбертовом пространстве, достигает своего максимума на любом выпуклом замкнутом ограниченном множестве (см. [1], теорема 2.3). Отсюда следует, что задача (3.1)–(3.3) имеет решение в $L_2(D)$. Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. Если $L_1 > 0, \dots, L_n > 0$, то для любого $u(\vec{x}) \in L_2(D)$, являющегося решением задачи (3.1)–(3.3), существует такой вектор $\vec{\lambda} \in R_n^+ = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mid \lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0\}$, что $u(\vec{x})$ удовлетворяет следующим требованиям:

1) $u(\vec{x}) = \xi(\vec{x})$ при $\vec{\lambda}\vec{x} < 1$ почти всюду в D;

2) $u(\vec{x}) = 0$ при $\vec{\lambda}\vec{x} > 1$ почти всюду в D.

Доказательство. Воспользуемся теоремой Куна – Таккера для задачи оптимизации в гильбертовом пространстве (см. [1, теорема 2.4]). Приведем ее формулировку.

Пусть $f(x)$ и $f_i(x)$ – выпуклые функционалы, определенные на выпуклом подмножестве гильбертова пространства H. Пусть требуется минимизировать функционал $f(\cdot)$ на C при ограничениях $f_i(x) < 0$, где $i = 1, \dots, n$.

Обозначим через x_0 точку, в которой достигается искомый минимум (по предположению конечный). Предположим, что для каждого отличного от нуля вектора $\vec{u}$ из R_n с неотрицательными компонентами найдется такая точка x из C, что

$$\sum_{k=1}^{n} u_k f_k(x) < 0,$$

где $\{u_k\}$ – компоненты вектора $\vec{u}$.

Тогда существует такой вектор $\vec{\lambda}$ с неотрицательными компонентами λ_k, что

$$\min_{x \in C} \left(f(x) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k(x)\right) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k(x_0) = f(x_0).$$

В нашем случае

$$H = L_2(D),$$

$$C = \{v(\vec{x}) \mid 0 \leq v(\vec{x}) \leq \xi(\vec{x}) \text{ почти всюду в } D,\ v(\vec{x}) \in L_2(D)\},$$

$$f(u(\cdot)) = -\int\limits_D u(\vec{x})dx_1 \dots dx_n,$$

$$f_i(u(\cdot)) = \int\limits_D x_i u(\vec{x})dx_1 \dots dx_n - L_i,$$

где $i = 1, \dots, n$, x_0 – решение задачи (3.1)–(3.3) $u(\vec{x})$.

По лемме 1 решение задачи (3.1)–(3.3) существует, следовательно, достигается конечный минимум $f(\cdot)$ в описанной задаче оптимизации. Кроме того, полагая $v_0(\vec{x}) \equiv 0$ при $\vec{x} \in D$, получаем, что $v_0(\vec{x}) \in C$ и $f_i(v_0(\cdot)) = -L_i < 0$ при $i = 1, \dots, n$. Таким образом, теорема Куна – Таккера применима к задаче оптимизации (3.1)–(3.3).

Поэтому существуют $\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0$ такие, что

$$\min_{v(\vec{x}) \in C} \left(-\int\limits_D v(\vec{x})dx_1 \dots dx_n + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_D \lambda_i x_i v(\vec{x})dx_1 \dots dx_n\right) \geq$$

$$\geq -\int\limits_D u(\vec{x})dx_1 \dots dx_n + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_D \lambda_i x_i u(\vec{x})dx_1 \dots dx_n.$$

Отсюда

$$\int\limits_D \left[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i - 1\right] [v(\vec{x}) - u(\vec{x})]\, dx_1 \dots dx_n \geq 0 \tag{3.4}$$

для любой $v(\vec{x}) \in C$.

Обозначим $B = \{\vec{x} \mid \vec{x} \in D$ и $\vec{\lambda}\vec{x} < 1\}$. Положим

$$v_1(\vec{x}) = \begin{cases} \xi(\vec{x}) & \text{при } \vec{x} \in B, \\ 0 & \text{при } \vec{x} \in D \setminus B. \end{cases}$$

Очевидно, что $v_1(\vec{x}) \in C$. Тогда, подставляя $v_1(\vec{x})$ в (3.4) и учитывая, что $0 \leq u(\vec{x}) \leq \xi(\vec{x})$ почти всюду в D, получаем, что $u(\vec{x}) = \xi(\vec{x})$ почти всюду в B и $u(\vec{x}) = 0$ почти всюду в $B_1 = \{\vec{x} \mid \vec{x} \in D$ и $\vec{\lambda}\vec{x} > 1\}$. Лемма 2 доказана.

Положим в задаче оптимизации (3.1)–(3.3)

$$L_i = \int\limits_{B_0} x_i \xi(\vec{x})dx_1 \dots dx_n \text{ при } i = 1, \dots, n. \tag{3.5}$$

Предположим, что $L_i > 0$.

В силу леммы 1 эта задача имеет решение $u_0(\vec{x}) \in L_2(D)$. Из леммы 2 следует, что существует такой вектор $\vec{\lambda} \geq 0$, что

$$u_0(\vec{x}) = \xi(\vec{x}) \text{ почти всюду в } B = \{\vec{x} \mid \vec{x} \in D \text{ и } \vec{\lambda}\vec{x} < 1\},$$

$$u_0(\vec{x}) = 0 \text{ почти всюду в } B_1 = \{\vec{x} \mid \vec{x} \in D \text{ и } \vec{\lambda}\vec{x} > 1\}.$$

ЛЕММА 3. $\operatorname{mes}(B \Delta B_0) = 0$.

Доказательство. Так как $u_0(\vec{x})$ – решение задачи (3.1)–(3.3) при условии (3.5) и

$$\int_D u_0(\vec{x})\,dx_1\dots dx_n=\int_B \xi(\vec{x})\,dx_1\dots dx_n,$$

то

$$\int_B \xi(\vec{x})\,dx_1\dots dx_n\ge\int_{B_0}\xi(\vec{x})\,dx_1\dots dx_n, \qquad (3.6)$$

так как

$$u(\vec{x})=\begin{cases}\xi(\vec{x}) & \text{при } \vec{x}\in B_0,\\ 0 & \text{при } \vec{x}\in D\setminus B_0\end{cases}$$

удовлетворяет ограничениям (3.2)-(3.3) при условии (3.5).

Кроме того,

$$\int_B x_j\xi(\vec{x})\,dx_1\dots dx_n\le\int_{B_0}x_j\xi(\vec{x})\,dx_1\dots dx_n$$

при $j=1,\dots,n$. Умножив каждое из этих неравенств на p_j/p_0 и сложив их, получаем

$$\int_B\Big(\sum_{j=1}^n\frac{p_j}{p_0}x_j\Big)\xi(\vec{x})\,dx_1\dots dx_n\le\int_{B_0}\Big(\sum_{j=1}^n\frac{p_j}{p_0}x_j\Big)\xi(\vec{x})\,dx_1\dots dx_n. \qquad (3.7)$$

Введем обозначения $D_1=B\setminus B_0$ и $D_2=B_0\setminus B$. Тогда из (3.6) и (3.7) следует, что

$$\int_{D_1}\xi(\vec{x})\,dx_1,\dots,dx_n\ge\int_{D_2}\xi(\vec{x})\,dx_1\dots dx_n,$$

$$\int_{D_1}\Big(\sum_{j=1}^n\frac{p_j}{p_0}x_j\Big)\xi(x)\,dx_1\dots dx_n\le\int_{D_2}\Big(\sum_{j=1}^n\frac{p_j}{p_0}x_j\Big)\xi(x)\,dx_1\dots dx_n.$$

Эти два неравенства совместны лишь при условии, что $\operatorname{mes} D_1=\operatorname{mes} D_2=0$, так как из определения B_0 следует, что при $\vec{x}\in D_2$ $\sum_{j=1}^n\frac{p_j}{p_0}x_j<1$, при $\vec{x}\in D_1$ $\sum_{j=1}^n\frac{p_j}{p_0}x_j\ge 1$, а $\xi(\vec{x})>0$ на D.

Таким образом, $\operatorname{mes}(B\Delta B_0)=0$. Лемма 3 доказана.

Рассмотрим функцию $Y=F(L_1,\dots,L_n)$, которая набору чисел $L_1>0,\dots,L_n>0$ ставит в соответствие число Y, равное значению функционала (3.1) на решении задачи оптимизации (3.1)-(3.3). Положим $F(L'_1,\dots,L'_n)=0$, если $L'_i\ge 0$ при $i=1,\dots,n$ и хотя бы одно $L'_j=0$. Из лемм 1-3 следует, что для любых $p_0>0$, $p_1\ge 0,\dots,p_n\ge 0$

$$g_0(p_1/p_0,\dots,p_n/p_0)=$$
$$=F(g_1(p_1/p_0,\dots,p_n/p_0),\dots,g_n(p_1/p_0,\dots,p_n/p_0)).$$

Таким образом, доказано существование производственной функции, ею является функция $Y=F(L_1,\dots,L_n)$, получаемая из решения задачи оптимизации (3.1)-(3.3).

4. Свойства производственной функции

4.1. Вогнутость производственной функции

ЛЕММА 4. Функция $Y=F(L_1,\dots,L_n)$ вогнута на множестве

$$A=\{(L_1,\dots,L_n)\,|\,L_1>0,\dots,L_n>0\},$$

если D — ограниченное множество.

Доказательство. Возьмем два произвольных набора чисел $L_1^1>0,\dots,L_n^1>0$ и $L_1^2>0,\dots,L_n^2>0$. Пусть им отвечают решения задачи оптимизации (3.1)-(3.3) $u_1(\vec{x})\in L_2(D)$ и $u_2(\vec{x})\in L_2(D)$ соответственно (в силу леммы 1 они существуют).

Пусть $0\le\alpha\le 1$. Рассмотрим набор чисел

$$\alpha L_1^1+(1-\alpha)L_1^2,\dots,\alpha L_n^1+(1-\alpha)L_n^2.$$

Так как $0\le u_1(\vec{x})\le\xi(\vec{x})$ почти всюду в D и $0\le u_2(\vec{x})\le\xi(\vec{x})$ почти всюду в D, то $0\le\alpha u_1(\vec{x})+(1-\alpha)u_2(\vec{x})\le\xi(\vec{x})$ почти всюду в D.

Из того, что

$$\int_D x_i u_1(\vec{x})\,dx_1\dots dx_n\le L_i^1,\quad\int_D x_i u_2(\vec{x})\,dx_1\dots dx_n\le L_i^2,$$

следует

$$\int_D x_i(\alpha u_1(\vec{x})+(1-\alpha)u_2(\vec{x}))\,dx_1\dots dx_n\le\alpha L_i^1+(1-\alpha)L_i^2.$$

Таким образом, $\alpha u_1(\vec{x})+(1-\alpha)u_2(\vec{x})$ удовлетворяет ограничениям (3.2), (3.3) при условии, что $L_i=\alpha L_i^1+(1-\alpha)L_i^2$, где $i=1,\dots,n$. Следовательно,

$$F(\alpha L_1^1+(1-\alpha)L_1^2,\dots,\alpha L_n^1+(1-\alpha)L_n^2)\ge\int_D(\alpha u_1(\vec{x})+(1-\alpha)u_2(\vec{x}))\,dx_1\dots dx_n=\alpha F(L_1^1,\dots,L_n^1)+(1-\alpha)F(L_1^2,\dots,L_n^2).$$

...ма 4 доказана.

4.2. Производные функций спроса и предложения

Введем обозначения $q_1 = p_1/p_0 \ge 0, \dots, q_n = p_n/p_0 \ge 0$. ...редположим, что $q_1 > 0$. Обозначим

$$G(q_{i_1},\dots,q_{i_l}) = \{(x_{i_1},\dots,x_{i_l}) \mid q_{i_1}x_{i_1} + \dots + q_{i_l}x_{i_l} < 1;\ x_{i_1} > 0,\dots,x_{i_l} > 0 \dots$$

...оложим $\xi(\vec{x}) \equiv 0$ при $\vec{x} \in R_n^+ \setminus D$.

Для любой функции $y(x_2,\dots,x_n)$ обозначим

$$M(y; q_1,\dots,q_n) = \frac{1}{q_1} \int\limits_{G(q_2,\dots,q_n)} y(x_2,\dots,x_n)\,\xi\Big(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_1}(q_2x_2 + \dots$$

$$\dots + q_nx_n), x_2,\dots,x_n\Big)dx_2\dots dx_n .$$

Из соотношения (2.1) и теоремы Фубини следует, что

$$g_0(q_1,\dots,q_n) = \int\limits_{G(q_1,\dots,q_n)} \xi(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n =$$

$$= \int\limits_{G(q_2,\dots,q_n)} \Big[\int\limits_0^{\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_1}(q_2x_2+\dots+q_nx_n)} \xi(x_1,\dots,x_n)dx_1\Big]dx_2\dots dx_n .$$

Предположим в дальнейшем, что D – область с кусочно-гладкой границей, а $\xi(\vec{x})$ – непрерывная на замыкании D функция. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial q_1} g_0(q_1,\dots,q_n) = -\frac{1}{q_1} \int\limits_{G(q_2,\dots,q_n)} \Big(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_1}(q_2x_2 + \dots$$

$$\dots + q_nx_n)\Big)\xi\Big(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_1}(q_2x_2 + \dots + q_nx_n), x_2,\dots,x_n\Big)dx_2\dots dx_n$$

так как

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\Big[\int\limits_0^{\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_1}(q_2x_2+\dots+q_nx_n)} \xi(x_1,\dots,x_n)dx_1\Big] = -\Big(\frac{1}{q_1^2} - \frac{1}{q_1^2}(q_2x_2 + \dots$$

$$+ q_nx_n)\Big)\xi\Big(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_1}(q_2x_2 + \dots + q_nx_n), x_2,\dots,x_n\Big).$$

...ислим производную по q_i при $i \ge 2$:

$$\frac{\partial}{\partial q_i} g_0(q_1,\dots,q_n) = -\frac{1}{q_i} \int\limits_{G(q_2,\dots,q_{i-1},q_{i+1}\dots)} \int\limits_0^{\frac{1}{q_1}} \dots$$

$$\dots + q_{i-1}x_{i-1} + q_{i+1}x_{i+1} + \dots + q_nx_n)\Big]$$

$$\frac{1}{q_i} - \frac{1}{q_i}(q_2x_2 + \dots + q_{i-1}x_{i-1} + q_{i+1}x_{i+1} + \dots$$

$$\dots, x_n)dx_1\}dx_2,\dots,dx_{i-1}dx_{i+1}\dots dx_n - \frac{1}{q_1} \int\limits_{G(q_2,\dots,q_n)}$$

$$\frac{1}{q_1}(q_2x_2 + \dots + q_nx_n), x_2,\dots,x_n)dx_2\dots dx_n\}.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial q_j} g_0(q_1,\dots,q_n) = -M(x_j; q_1,\dots,q_n), \text{ где } j = 1, \dots$$

а

$$x_1 = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_1}(q_2x_2 + \dots + q_nx_n).$$

Вычисления производных $\frac{\partial}{\partial q_j} g_k(q_1,\dots,q_n)$ пр... $= 1,\dots,n$, $k = 1,\dots,n$ аналогичны приведенным выш... надо лишь функцию $\xi(x_1,\dots,x_n)$ во всех формулах заменить на функцию $x_k\xi(x_1,\dots,x_n)$.

Вычисления приводят к формуле

$$\frac{\partial}{\partial q_j} g_k(q_1,\dots,q_n) = -M(x_jx_k; q_1,\dots,q_n) \text{ при } j = 1,\dots,n,\ k = \dots$$

где

$$x_1 = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_1}(q_2x_2 + \dots + q_nx_n).$$

4.3. Производные производственной функции

Из свойств, рассмотренных в п. 2, следует, что

$$dY = -\sum_{j=1}^{n} M(x_j; q_1,\dots,q_n)dq_j$$

$$dL_i = -\sum_{j=1}^{n} M(x_ix_j; q_1,\dots,q_n)dq_j .$$

Заметим, что

$$\sum_{i=1}^{n} q_i M(x_i\, y(x_2,\dots,x_n); q_1,\dots,q_n) = \frac{1}{q_1}\Big\{ \int\limits_{G(q_2,\dots,q_n)} \dots$$

$$q_1\left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_1}(q_2x_2 + \ldots + q_nx_n)\right) + q_2x_2 + \ldots + q_nx_n]\xi\left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_1}(q_2x_2 + \ldots + q_nx_n), x_2, \ldots, x_n\right)$$

$$dx_2 \ldots dx_n = M(y(x_2, \ldots, x_n); q_1, \ldots, q_n),$$

если определитель $|M(x_i x_j; q_1, \ldots, q_n)| \neq 0$, то

$$\partial Y/\partial L_j = \frac{\begin{vmatrix} M(x_1^2; q_1, \ldots, q_n), \ldots, M(x_1x_n; q_1, \ldots, q_n) \\ \cdots \\ M(x_{j-1}x_1; q_1, \ldots, q_n), \ldots, M(x_{j-1}x_n, q_1, \ldots, q_n) \\ M(x_1; q_1, \ldots, q_n), \ldots, M(x_n; q_1, \ldots, q_n) \\ M(x_{j+1}x_1; q_1, \ldots, q_n), \ldots, M(x_{j+1}x_n; q_1, \ldots, q_n) \\ \cdots \\ M(x_nx_1; q_1, \ldots, q_n), \ldots, M(x_n^2; q_1, \ldots, q_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} M(x_1^2; q_1, \ldots, q_n), \ldots, M(x_1x_n, q_1, \ldots, q_n) \\ \cdots \\ M(x_nx_1; q_1, \ldots, q_n), \ldots, M(x_n^2; q_1, \ldots, q_n) \end{vmatrix}} = q_j,$$

так как

$$\sum_{i=1}^{n} q_i M(x_i x_j; q_1, \ldots, q_n) = M(x_j; q_1, \ldots, q_n).$$

Рассмотрим условие существования производных $\partial Y/\partial L_j$:

$$\begin{vmatrix} M(x_1^2; q_1, \ldots, q_n), \ldots, M(x_1x_n; q_1, \ldots, q_n) \\ \cdots \\ M(x_1x_n; q_1, \ldots, q_n), \ldots, M(x_n^2; q_1, \ldots, q_n) \end{vmatrix} \neq 0. \quad (4.1)$$

Если $q_1 \neq 0$, то условие (4.1) эквивалентно условию

$$\begin{vmatrix} J(q_1, \ldots, q_n), M(x_2; q_1, \ldots, q_n), \ldots, M(x_n; q_1, \ldots, q_n) \\ M(x_2; q_1, \ldots, q_n), M(x_2^2; q_1, \ldots, q_n), \ldots, M(x_2x_n; q_1, \ldots, q_n) \\ \cdots \\ M(x_n; q_1, \ldots, q_n), M(x_nx_2; q_1, \ldots, q_n), \ldots, M(x_n^2; q_1, \ldots, q_n) \end{vmatrix} \neq 0, \quad (4.2)$$

где

$$J(q_1, \ldots, q_n) = \frac{1}{q_1} \int\limits_{G(q_1, \ldots, q_n)} \xi\left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_1}(q_2x_2 + \ldots + q_nx_n), x_2, \ldots, x_n\right) dx_2 \ldots dx_n.$$

При доказательстве эквивалентности условий (4.1) и (4.2) используются соотношения

$$\sum_{j=1}^{n} q_j M(x_i x_j; q_1, \ldots, q_n) = M(x_i; q_1, \ldots, q_n),$$

$$\sum_{j=1}^{n} q_j M(x_j; q_1, \ldots, q_n) = J(q_1, \ldots, q_n)$$

и предположение, что $q_1 \neq 0$.

Если $J(q_1, \ldots, q_n) \neq 0$, то условие (4.2) эквивалентно условию

$$\begin{vmatrix} M(x_2^2; q_1, \ldots, q_n) - \frac{M(x_2; q_1, \ldots, q_n)^2}{J(q_1, \ldots, q_n)}, \ldots, M(x_2x_n; q_1, \ldots, q_n) - \frac{M(x_2; q_1, \ldots, q_n)M(x_n; q_1, \ldots, q_n)}{J(q_1, \ldots, q_n)} \\ \cdots \\ M(x_2x_n; q_1, \ldots, q_n) - \frac{M(x_2; q_1, \ldots, q_n)M(x_n; q_1, \ldots, q_n)}{J(q_1, \ldots, q_n)}, \ldots, M(x_n^2; q_1, \ldots, q_n) - \frac{M(x_n; q_1, \ldots, q_n)^2}{J(q_1, \ldots, q_n)} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Как известно [3], условие (4.3) выполняется, если множество

$$\{(x_2, \ldots, x_n) \mid \xi\left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_1}(x_2q_2 + \ldots + x_nq_n), x_2, \ldots, x_n\right) > 0\}$$

не содержится ни в какой гиперплоскости размерности $(n-2)$.

4.4. Функция прибыли и преобразование Лежандра – Юнга – Фенхеля производственной функции

Будем обозначать через $\vec{L}$ n-мерный вектор затрат производственных факторов $(L_1, \ldots, L_n)$. Доопределим производственную функцию $F(L_1, \ldots, L_n)$, полагая ее равной $-\infty$ на всех векторах $\vec{L}$, имеющих хотя бы одну отрицательную компоненту. При таком доопределении функция $-F(L_1, \ldots, L_n)$ будет выпуклой, т.е. ее надграфик будет выпуклым множеством. Будем предполагать, что $\xi(\vec{x})$ имеет суммируемый квадрат на ограниченном, измеримом множестве D. Очевидно, что тогда функция $-F(L_1, \ldots, L_n)$ будет собственной.

Рассмотрим преобразование Лежандра – Юнга – Фенхеля функции $-F(L_1, \ldots, L_n)$:

$$\max_{\vec{L}} \left(-\sum_{i=1}^{n} q_i L_i - (-F(L_1, \ldots, L_n))\right) = \hat{F}(-q_1, \ldots, -q_n). \quad (4.4)$$

Введем в рассмотрение функцию прибыли
$$\tilde{F}(q_1,\dots,q_n) = \hat{F}(-q_1,\dots,-q_n).$$
Рассматриваемая отрасль получает суммарную прибыль
$$p_0 \int_{B_0} \xi(\vec{x})dx_1\dots dx_n - \sum_{i=1}^{n} p_i \int_{B_0} x_i \xi(\vec{x})dx_1\dots dx_n,$$
где $p_0>0$ – цена на выпускаемый отраслью продукт, $p_1\geq 0,\dots, p_n\geq 0$ – цены факторов производства и $B_0 = \{\vec{x} \mid \sum_{i=1}^{n} p_i x_i < p_0, \ \vec{x}\in D\}$ – множество прибыльных при данных ценах технологий.

ЛЕММА 5. При любых
$$p_0>0,\ p_1\geq 0,\dots, p_n\geq 0,$$
$$p_0 \int_{B_0} \xi(\vec{x})dx_1\dots dx_n - \sum_{i=1}^{n} p_i \int_{B_0} x_i \xi(\vec{x})dx_1\dots dx_n = p_0 \tilde{F}\left(\frac{p_1}{p_0},\dots,\frac{p_n}{p_0}\right).$$

Доказательство. Покажем сначала, что если $\operatorname{mes} B_0 = 0$, то $\tilde{F}(p_1/p_0,\dots,p_n/p_0) = 0$. Предположим противное, что $\tilde{F}(p_1/p_0,\dots,p_n/p_0) \neq 0$. Так как при $\vec{L}^1 = 0$
$$F(\vec{L}^1) - \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{p_0} L_i^1 = 0,$$
то из формулы (4.4) следует, что $\tilde{F}(p_1/p_0,\dots,p_n/p_0)>0$. Но тогда из (4.4) следует, что существуют $L_1^2>0,\dots, L_n^2>0$ такие, что
$$F(L_1^2,\dots,L_n^2) - \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{p_0} L_i^2 > 0. \tag{4.5}$$

В силу лемм 1–2 для $L_1^2>0,\dots, L_n^2>0$ существует вектор $\vec{\lambda}$ такой, что если $B = \{\vec{x} \mid \vec{x}\in D,\ \vec{\lambda}\vec{x}<1\}$, то
$$F(L_1^2,\dots,L_n^2) = \int_B \xi(\vec{x})dx_1\dots dx_n > 0,$$
$$\int_B x_i \xi(\vec{x})dx_1\dots dx_n \leq L_i^2 \quad \text{при } i=1,\dots,n.$$
Тогда из (4.5) следует, что
$$\int_B \xi(x)\left[1-\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{p_0}x_i\right]dx_1\dots dx_n > 0, \tag{4.6}$$

Но (4.6) невозможно, так как $\xi(\vec{x})>0$ в D, $\left[1-\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{p_0}x_i\right] \leq 0$ почти всюду в D, поскольку $\operatorname{mes} B_0 = 0$ в D. Мы пришли к противоречию. Значит, если $\operatorname{mes} B_0 = 0$, то $\tilde{F}(p_1/p_0,\dots,p_n/p_0) = 0$ (тем самым в этом случае лемма доказана).

Предположим теперь, что $\operatorname{mes} B_0>0$. Тогда, полагая
$$L_1^0 = \int_{B_0} x_1\xi(\vec{x})dx_1\dots dx_n,\ \dots,\ L_n^0 = \int_{B_0} x_n\xi(\vec{x})dx_1\dots dx_n,$$
получаем, что
$$\tilde{F}\left(\frac{p_1}{p_0},\dots,\frac{p_n}{p_0}\right) = \max_{\vec{L}}\left[F(L_1,\dots,L_n) - \sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{p_0}L_i\right] \geq$$
$$F(L_1^0,\dots,L_n^0) - \sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{p_0}L_i^0 = \int_{B_0}\xi(\vec{x})\left[1-\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{p_0}x_i\right]dx_1\dots dx_n > 0, \tag{4.7}$$
так как $\xi(\vec{x})>0$ на D и $\left[1-\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{p_0}x_i\right]>0$ при $\vec{x}\in B_0$.

Покажем, что тогда
$$\tilde{F}\left(\frac{p_1}{p_0},\dots,\frac{p_n}{p_0}\right) = \max_{\vec{L}>0}\left[F(L_1,\dots,L_n) - \sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{p_0}L_i\right]. \tag{4.8}$$
Действительно, если у вектора $\vec{L}$ одна компонента отрицательна, то $F(\vec{L}) = -\infty$ (по определению); если у вектора $\vec{L}^3$ одна компонента нулевая, а остальные неотрицательны, то
$$F(L_1^3,\dots,L_n^3) - \sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{p_0}L_i^3 \leq 0,$$
где $\vec{L}^3 = (L_1^3,\dots,L_n^3)$. Но тогда из (4.7) следует (4.8).

В силу лемм 1–2 для любого $\vec{L}>0$ существует $\vec{\lambda}\geq 0$ такое, что если ввести обозначение
$$B = \{\vec{x} \mid \vec{x}\in D,\ \vec{\lambda}\vec{x}<1\},$$
$$F(\vec{L}) = \int_B \xi(\vec{x})\,dx_1\dots dx_n$$
$$\int_B x_i\,\xi(\vec{x})dx_1\dots dx_n \leq L_i \quad \text{при } i=1,\dots,n, \text{ где } \vec{L}=(L_1,\dots,L_n).$$
Так как $p_i/p_0\geq 0$ при $i=1,\dots,n$, то из (4.8) получаем
$$\tilde{F}\left(\frac{p_1}{p_0},\dots,\frac{p_n}{p_0}\right) = \max_{\vec{\lambda}\geq 0}\left\{\int_{B=\{\vec{x}\mid\vec{x}\in D,\ \vec{\lambda}\vec{x}<1\}} \xi(\vec{x})\left[1-\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{p_0}x_i\right]dx_1\dots dx_n\right\}. \tag{4.9}$$
Так как $\xi(\vec{x})>0$ на D, то из (4.9) вытекает, что

$$F\left(\frac{p_1}{p_0}, \ldots, \frac{p_n}{p_0}\right) = \int_{B_0} \xi(\vec{x})[1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{p_0} x_i]\, dx_1 \ldots dx_n .$$

Лемма 5 доказана.

Из определения функции $F(q_1, \ldots, q_n)$ легко получить, что

$$F(q_1, \ldots, q_n) = +\infty \text{ при } \vec{q} = (q_1, \ldots, q_n) \notin R_n^+ =$$

$$= \{(q_1, \ldots, q_n) \mid q_i \geq 0 \text{ при } i = 1, \ldots, n\}.$$

Из общих свойств преобразования Лежандра – Юнга – Фенхеля следует, что функция прибыли $F(q_1, \ldots, q_n)$ выпуклая функция (см. [2] § 3.3). Из теоремы Фенхеля–Моро (см. [2] § 3.3) следует, что

$$F(\vec{L}) = \min_{\vec{q}} (F(\vec{q}) + \vec{q}\vec{L}). \tag{4.10}$$

Таким образом, производственная функция отрасли $F(L_1, \ldots, L_n)$ и функция прибыли отрасли $F(q_1, \ldots, q_n)$ восстанавливаются друг по другу однозначно.

ЛЕММА 6. Пусть D_1 и D_2 измеримые, ограниченные подмножества R_n^+ положительной меры. Пусть функции $\xi_1(\vec{x})$ и $\xi_2(\vec{x})$, определенные на R_n^+, такие, что $\xi_1(\vec{x}) \in L_2(D_1)$, $\xi_2(\vec{x}) \in L_2(D_2)$, $\xi_1(\vec{x}) > 0$ при $\vec{x} \in D_1$, $\xi_1(\vec{x}) = 0$, при $\vec{x} \in R_n^+ \setminus D_1$, $\xi_2(\vec{x}) = 0$, при $\vec{x} \in R_n^+ \setminus D_1$, $\xi_2(\vec{x}) > 0$, при $\vec{x} \in D_2$. Тогда для того, чтобы $\xi_1(\vec{x})$ и $\xi_2(\vec{x})$ определяли одну и ту же производственную функцию $F(L_1, \ldots, L_n)$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\vec{\lambda} \geq 0$:

$$\int_{\{\vec{x} \mid \vec{x} \in D, \vec{\lambda}\vec{x} < 1\}} [1 - \vec{\lambda}\vec{x}](\xi_1(\vec{x}) - \xi_2(\vec{x}))\, dx_1 \ldots dx_n = 0, \tag{4.11}$$

где $D = D_1 \cup D_2$.

Доказательство. В силу леммы 5 выполнение соотношения (4.11) при любом $\vec{\lambda} \geq 0$ эквивалентно равенству функций прибыли, $F_1(\vec{q})$ и $F_2(\vec{q})$, построенных для распределений мощностей по технологическим способам производства $\xi_1(\vec{x})$ и $\xi_2(\vec{x})$ соответственно. Но это в силу соотношений (4.4) и (4.10) эквивалентно равенству производственных функций, построенных для распределений мощностей $\xi_1(\vec{x})$ и $\xi_2(\vec{x})$.

4.5. Эластичность по отношению к объему производства

Пусть D – ограниченное множество. Предположим, что при $L_1 = g_1(q_1, \ldots, q_n), \ldots, L_n = g_n(q_1, \ldots, q_n)$, где $q_1 \geq 0, \ldots, q_n \geq 0$, $Y = F(L_1, \ldots, L_n) > 0$, и существуют производные $\partial F / \partial L_j$ при $j = 1, \ldots, n$. Тогда коэффициентом эластичности по отношению к объему производства в точке $\vec{L} = (L_1, \ldots, L_n)$ называется число

$$\varepsilon(\vec{L}) = \frac{1}{Y}\left(L_1 \frac{\partial F}{\partial L}\Big|_{\vec{L}} + \ldots + L_n \frac{\partial F}{\partial L}\Big|_{\vec{L}}\right)$$

Из леммы 5 следует, что в (4.4) максимум достигается при $L_1 = g_1(q_1, \ldots, q_n), \ldots, L_n = g_n(q_1, \ldots, q_n)$. Так как $F(L_1, \ldots, L_n)$ дифференцируема в этой точке, то из равенства нулю первых производных в точке максимума следует, что

$$\frac{\partial F}{\partial L_j}\Big|_{\vec{L}} = q_j \quad \text{при } j = 1, \ldots, n.$$

Таким образом, в точке $\vec{L}$:

$$\varepsilon(\vec{L}) = \frac{1}{F(L_1, \ldots, L_n)}(q_1 L_1 + \ldots + q_n L_n). \tag{4.12}$$

Покажем, что $\varepsilon(\vec{L}) < 1$. В силу (4.12) это эквивалентно неравенству

$$\sum_{i=1}^{n} q_i L_i < F(L_1, \ldots, L_n). \tag{4.13}$$

Неравенство (4.13) эквивалентно неравенству

$$\int_{\{\vec{x} \mid \vec{x} \in D, \vec{q}\vec{x} < 1\}} [\vec{q}\vec{x} - 1]\xi(\vec{x})\, dx_1 \ldots dx_n < 0. \tag{4.14}$$

Так как $F(L_1, \ldots, L_n) > 0$, то $\operatorname{mes}\{\vec{x} \mid \vec{x} \in D, \vec{q}\vec{x} < 1\} > 0$, откуда следует справедливость неравенства (4.14).

Областью замещения будем называть множество

$$\{(L_1, \ldots, L_n) \mid (q_1, \ldots, q_n) \in R_n^+ : L_1 =$$

$$= g_1(q_1, \ldots, q_n), \ldots, L_n = g_n(q_1, \ldots, q_n)\}.$$

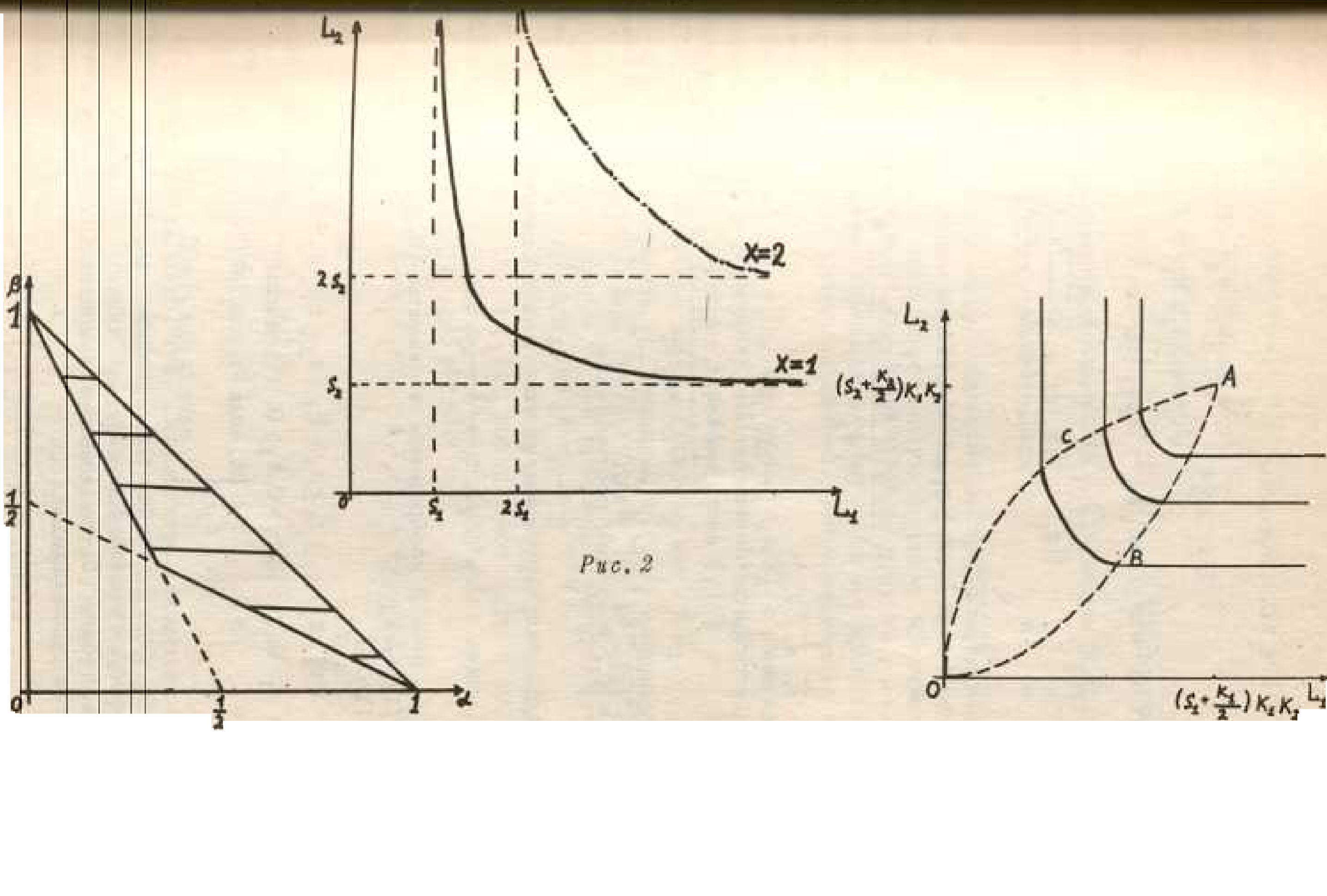
Таким образом, построенные производственные функции имеют в области замещения эластичность $\varepsilon(\vec{L}) < 1$.

5. Примеры производственных функций

Рассмотрим примеры производственных функций отрасли, использующей два вида факторов производства.

Пример 1. Пусть

$$D = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \quad), x_2 > 0\},\ \xi(x_1, x_2) = A x_1^{\alpha_1 - 1} x_2^{\alpha_2 - 1},$$



β
1
$\frac{1}{2}$
0
$\frac{1}{2}$
1
α
L_2
$X=2$
$2s_2$
$X=1$
s_2
0
s_1
$2s_1$
L_1
L_2
$(s_2+\frac{K_2}{2})K_1K_2$
A
C
B
O
$(s_1+\frac{K_1}{2})K_1K_2$
L_1

Рис. 2

$s_1>0$ и $s_2>0$. Положим

$$\xi(x_1, x_2)=\begin{cases}1, \text{ если } (x_1, x_2)\in D,\\ 0, \text{ если } (x_1, x_2)\notin D.\end{cases}$$

Тогда, если $1-s_1q_1-s_2q_2\ge 0$, то

$$Y=\int_0^{\frac{1}{q_1}}\Big[\int_0^{\frac{1}{q_2}-\frac{q_1}{q_2}x_1}\xi(x_1, x_2)\,dx_2\Big]dx_1=\frac{1}{2}\,\frac{(1-q_1s_1-q_2s_2)^2}{q_1q_2},$$

$$L_1=\int_0^{\frac{1}{q_1}}\Big[\int_0^{\frac{1}{q_2}-\frac{q_1}{q_2}x_1}x_1\,\xi(x_1, x_2)\,dx_2\Big]dx_1=$$

$$=\frac{1}{6}\,\frac{(1-q_1s_1-q_2s_2)^3}{q_1^2q_2}+\frac{s_1}{2}\,\frac{(1-q_1s_1-q_2s_2)^2}{q_1q_2}$$

$$L_2=\int_0^{\frac{1}{q_1}}\Big[\int_0^{\frac{1}{q_2}-\frac{q_1}{q_2}x_1}x_2\,\xi(x_1, x_2)\,dx_2\Big]dx_1=$$

$$=\frac{1}{6}\,\frac{(1-q_1s_1-q_2s_2)^3}{q_1q_2^2}+\frac{s_2}{2}\,\frac{(1-q_1s_1-q_2s_2)^2}{q_1q_2}$$

Если $1-q_1s_1-q_2s_2<0$, то $Y=L_1=L_2=0$. Исключ[ая] q_1 и q_2, получаем соотношение

$$Y^3=\frac{9}{2}\,(L_1-s_1Y)(L_2-s_2Y), \quad (5.$$

откуда получается выражение для изокванты

$$L_2=s_2Y+\frac{2Y^3}{9(L_1-s_1Y)} \quad (5.$$

На рис. 2 изображены изокванты (5.2).

Пример 3.

Пусть

$$D=\{(x_1, x_2)|\, s_1\le x_1\le s_1+k_1,\ s_2\le x_2\le s_2+k_2\},$$

где $s_1>0$, $s_2>0$, $k_1>0$, $k_2>0$. Положим

$$\xi(x_1, x_2)=\begin{cases}1, \text{ если } (x_1, x_2)\in D,\\ 0, \text{ если } (x_1, x_2)\notin D.\end{cases}$$

На рис. 3 изображены изокванты соответствующей производственной функции.

В работе [5] показано, что кривая OBA на рис. 3 з[адается] уравнением

$$L_2=\left(s_2+\frac{L_1}{2k_1\left(s_1+\frac{k_1}{2}\right)}\right)\frac{L_1}{s_1+\frac{k_1}{2}}$$

кривая ... уравнением

$$\left(s_1+\frac{L_2}{2k_2\left(s_2+\frac{k_2}{2}\right)}\right)\frac{L_2}{s_2+\frac{k_2}{2}}.$$

При ...х $L'_1\ge\left(s_1+\frac{k_1}{2}\right)k_1k_2$ и $L'_2\ge\left(s_2+\frac{k_2}{2}\right)k_1k_2$ зна[чение] ...д[производ]ственной функции $F(L'_1, L'_2)$ равно k_1k_2.

6. Теорема единственности

В [рас]смотренной модели функция распределения мощ[ностей по] технологическим способам производства одноз[начно] определяет производственную функцию. Возникает естественный вопрос: могут ли разные функции распределения мощностей определять одну и ту же производственную функцию? Ответ на вопрос дает следующая теорема.

Теорема. Пусть D_1 и D_2 две области в R_n^+ с гладкими границами. Пусть функции распределения мощностей по технологическим способам производства $\xi_1(\vec{x})$ и $\xi_2(\vec{x})$ таковы, что $\xi_1(\vec{x})\equiv 0$ при $\vec{x}\notin D_1$, $\xi_2(\vec{x})\equiv 0$, при $\vec{x}\notin D_2$, $\xi_1(\vec{x})$ непрерывна на D_1 вплоть до границы, и $\xi_2(\vec{x})$ непрерывна на D_2 вплоть до границы. Тогда если $\xi_1(\vec{x})$ и $\xi_2(\vec{x})$ определяют в модели одну и ту же производственную функцию, то $\xi_1(\vec{x})\equiv\xi_2(\vec{x})$ на R_n^+.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\xi_0(\vec{x})=\xi_1(\vec{x})-\xi_2(\vec{x})$. Так как $\xi_1(\vec{x})$ и $\xi_2(\vec{x})$ определяют одну и ту же производственную функцию, то, как следует из леммы 6, для [все]х $q_1>0,\dots,q_n>0$:

$$g(q_1,\dots,q_n)=\int(1-q_1x_1-\dots-q_nx_n)\,\xi_0(\vec{x})\,dx_1\dots dx_n\equiv 0. \quad (6.1)$$

Но тогда при $q_1>0,\dots,q_n>0$:

$$\frac{\partial g}{\partial q_i}\equiv 0,\quad \frac{\partial^2 g}{\partial q_i\,\partial q_j}\equiv 0,\ \text{ где } i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,n. \quad (6.2)$$

Нетрудно показать, что результаты, полученные в разд. 4, справедливы также для случая, когда вместо обычной функции распределения мощностей по технологическим способам производства используется функция $Q(\vec{x})\,\xi_0(\vec{x})$, где $Q(\vec{x})$ — произвольная полиномиальная функция.

Из (6.2) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial q_i} g(q_1, \dots, q_n) = \frac{1}{q_1}\Big[\int\limits_{G(q_2,\dots,q_n)} x_i\, \xi_0(x_1, \dots, x_n)dx_2 \dots dx_n -$$

$$- \sum_{j=1}^{n} q_j \int\limits_{G(q_2,\dots,q_n)} x_i x_j\, \xi(x_1, \dots, x_n)dx_2 \dots dx_n\Big]$$

$$- \int\limits_{G(q_1,\dots,q_n)} x_i\, \xi_0(x_1, \dots, x_n)dx_1 \dots dx_n \equiv 0,$$

где

$$x_1 = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_1}(q_2 x_2 + \dots + q_n x_n)$$

Из (6.2) и (6.3) следует, что

$$\frac{\partial^2 g}{\partial q_i \partial q_j} = \frac{1}{q_1} \int\limits_{G(q_2,\dots,q_n)} x_i x_j\, \xi_0(x_1, \dots, x_n)dx_2 \dots dx_n \equiv 0,$$

где

$$x_1 = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_1}(q_2 x_2 + \dots + q_n x_n).$$

Так как (6.4) справедливо при любых $q_1 > 0, \dots, q_n > 0$, то

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\varepsilon}^{1} \Big[\int\limits_{G(\frac{q_2}{t}, \dots, \frac{q_n}{t})} x_i x_j\, \xi_0\Big(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_1}(q_2 x_2 + \dots + q_n x_n),$$

$$x_2, \dots, x_n\Big)dx_2 \dots dx_n\Big] dt \equiv 0,$$

где

$$x_1 = \frac{t}{q_1} - \frac{1}{q_1}(q_2 x_2 + \dots + q_n x_n),$$

но из (6.5) следует, что для любых $q_1 > 0, \dots, q_n > 0$:

$$\int\limits_{G(q_1,\dots,q_n)} x_i x_j\, \xi_0(x_1, \dots, x_n)dx_1 \dots dx_n \equiv 0.$$

Из (6.3) и (6.6) видно, что для любых $q_1 > 0, \dots, q_n > 0$

$$\int\limits_{G(q_1,\dots,q_n)} (1 - q_1 x_1 - \dots - q_n x_n) x_i\, \xi_0(x_1, \dots, x_n)dx_1 \dots dx_n \equiv 0,$$

где $i = 1, \dots, n$.

Сравнивая (6.1) и (6.7), мы видим, что повторяя рассуждения достаточное число раз, можно показать, что для любого $\vec{q} > 0$:

$$\int\limits_{G(q_1,\dots,q_n)} P(\vec{x})\, \xi_0(\vec{x})dx_1 \dots dx_n \equiv 0, \qquad (6.8)$$

где $P(\vec{x})$ – произвольная полиномиальная функция. Из (6.8) следует, что

$$\xi_0(\vec{x}) \equiv 0 \text{ при } \vec{x} \in G(q_1, \dots, q_n). \qquad (6.9)$$

Но в силу того, что $q_1 > 0, \dots, q_n > 0$ могут быть любыми, из (6.9) следует, что $\xi_0(\vec{x}) \equiv 0$ при $\vec{x} \in R_n^+$. Теорема доказана.

7. Об использовании построенной производственной функции в многосекторных моделях экономики рыночного типа

В работе [8] рассматриваются многосекторные модели рыночной экономики, в которых при описании функционирования отраслей используется частный вид изучаемой в данной статье производственной функции. В работе [8] предполагается, что каждая отрасль в процессе производства использует рабочую силу и, вообще говоря, продукцию других отраслей, но нормы затрат этих продукций одни и те же по всей отрасли. Если отказаться от этого упрощающего предположения, то для построения уравнения, описывающего изменение ставки заработной платы, надо будет решать следующую задачу.

Пусть известна цена на выпускаемую отраслью продукцию $p_0 > 0$, а также цены $p_1 > 0, \dots, p_{n-1} > 0$ на продукцию других отраслей. Пусть известно $L_n > 0$ количество рабочей силы, имеющейся в распоряжении отрасли. Требуется определить ставку заработной платы $s > 0$ такую, чтобы при ценах $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}$ использовалось количество рабочей силы L_n при условии, что существует такая ставка заработной платы $s' > 0$, что при ценах $p_0, p_1, \dots, p_n$ используется количество рабочей силы $L'_n > L_n$. Обозначим через Y количество выпускаемой отраслью продукции, а через $\vec{X} = (L_1, \dots, L_{n-1})$ количества использованных продуктов других отраслей.

В этом разделе мы рассмотрим случай, когда D является гладкой областью, а функция распределения мощностей по технологическим способам производства является непрерывной функцией.

Тогда, используя обозначение (2.2), имеем

$$L_1 = g_1(p_1/p_0, \dots, p_{n-1}/p_0, s/p_0),$$

$$\dots\dots\dots$$

$$L_n = g_n(p_1/p_0, \dots, p_{n-1}/p_0, s/p_0).$$

Из п. 2 разд. 4 следует, что существует производ- $\partial g_n/\partial s \le 0$, так как

$$\lim_{s\to\infty} g_n(p_1/p_0, \dots, p_{n-1}/p_0, s/p_0) = 0$$

это следует из формул (2.2)) и

$$g_n(p_1/p_0, \dots, p_{n-1}/p_0, s'/p_0) \qquad n,$$

го существует и притом, как нетрудно показать, ед- ственное $s>0$ такое, что

$$g_n(p_1/p_0, \dots, p_{n-1}/p_0, s/p_0) = L_n. \qquad (7.$$

Из результатов п. 3 разд. 4 следует, что производ- ственная функция $Y = F(L_1, \dots, L_n)$ дифференцируема точке

$$L_1 = g_1(p_1/p_0, \dots, p_{n-1}/p_0, s/p_0), \dots, L_n = g_n(p_1/p_0, \dots, p_{n-1}/p_0, s$$

и что в этой точке

$$\partial F/\partial L_1(\vec{X}, L_n) = p_1/p_0,$$

$$\partial F/\partial L_{n-1}(\vec{X}, L_n) = p_{n-1}/p_0, \qquad (7.$$

$$\partial F/\partial L_n(\vec{X}, L_n) = s/p_0. \qquad (7.$$

Разрешая уравнения (7.2) (это можно сделать в си- существования и единственности решения уравнения (7. и формул (7.3) и (2.2)), получаем

$$\vec{X} = \vec{\Phi}(L_n, p_1/p_0, \dots, p_{n-1}/p_0). \qquad (7.$$

Тогда из (7.2) и (7.4) следует, что

$$s = p_0 \frac{\partial F}{\partial L_n} \Big| (\vec{\Phi}(L_n, \frac{p_1}{p_0}, \dots, \frac{p_{n-1}}{p_0}), \quad n). \qquad (7.5$$

Формулы (7.3)–(7.5) решают поставленную в это- разделе задачу.

В работе [8] рассмотрена двухсекторная модель, которой первая отрасль использует единственный произ- водственный фактор – рабочую силу, а вторая отрас-

использует в процессе производства, кроме рабочей силы, продукцию первой отрасли. В [8] предполагается, что норма затрат продукции первой отрасли на выпуск еди- ницы продукции второй отрасли одинакова по всей отрас- ли. Если отказаться от этого ограничения, сохранив ос- тальные предположения, использованные при построении модели и воспользоваться полученными ранее в данной статье результатами, то некоторые соотношения модели из работы [8] изменятся. Ниже мы укажем, как изме- нятся эти соотношения, сохраняя обозначения работы [8].

Во-первых, производственная функция второй отрасли будет иметь вид

$$Y_2 = M_2 f_2(L_2/M_2, Z/M_2) = M_2 f_2(x_2, z);$$

где Z – поток продукции первой отрасли, используемый во второй отрасли, $x_2 = L_2/M_2$, $z = Z/M_2$.

Во-вторых, в новой модели при предположении, что множество возможных технологий D_2 является связной областью с гладкой границей и что функция распределе- ния мощностей второй отрасли $\xi_2(y_1, y_2)$ – непрерывная на D_2 функция (здесь y_1 – норма затрат продукции первой отрасли, y_2 – норма затрат трудовых ресурсов), соотно- шение

$$\partial/\partial x_2 f_2(x_2) = s/p_2$$

заменится двумя соотношениями

$$\partial/\partial x_2 f_2(x_2, z) = s_2/p_2, \quad \partial/\partial z f_2(x_2, z) = p_1/p_2.$$

Разрешая уравнение $\partial/\partial z f_2(x_2, z) = p_1/p_2$ относитель- но z, получаем функцию $z = Z(p_1/p_2, x_2)$. Доопределим $Z(p_1/p_2, x_2)$, полагая ее равной

$$\frac{1}{M_2} \int_{D_2} y_1\, \xi(y_1, y_2)\, dy_1\, dy_2,$$

если для любых $(y_1, y_2) \in D_2$, $p_1 y_1 + s_2 y_2 < p_2$, и равной ну- лю, если для любых $(y_1, y_2) \in D_2$ $p_1 y_1 + s_2 y_2 > p_2$.

В модифицированной модели изменится уравнение для ставки заработной платы, которое примет вид

$$\frac{ds_2}{dt} = \frac{1}{\Delta_2} \max\{0,\ p_2\, \partial/\partial x_2 f_2(\tilde{x}_2, Z(p_1/p_2, \tilde{x}_2)) - s_2\}.$$

Литература

. Балакришнан А. Введение в теорию оптими-
ции в гильбертовом пространстве. М., Изд-во "Ми
1974.

2. Иоффе А.Д. и Тихомиров В.М. Теория эк-
тремальных задач. М., Изд-во "Наука", 1974.

3. Уилкс С. Математическая статистика. М., Изд-
"Наука", 1967.

4. Клейнер Г.Б. Область определения производс-
венной функции. Экономика и математические метод
1978, 14, № 5.

5. Johansen L. Production functions, Amsterdam–London
1972.

6. Петров А.А., Поспелов И.Г. Системный анал
развивающейся экономики: к теории производствен
функций, I. Техническая кибернетика, 1979, № 2.

7. Петров А.А., Поспелов И.Г. Системный анал
развивающейся экономики: системный подход и односе
торная модель, II. Техническая кибернетика, 1979, №

8. Петров А.А., Поспелов И.Г. Системный анал
развивающейся экономики: многосекторная модель и учего
природных ресурсов, III. Техническая кибернетика, 197
№ 4.

9. Петров А.А., Поспелов И.Г. Системный анал
развивающейся экономики: учет научно-технического пр
гресса, IV. Техническая кибернетика, 1979, № 5.

10. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального
интегрального исчисления. Т. 2. М., Изд-во Наука
1966.

УДК 330.115

Б. МОЛДАШЕВА, ПЕТРОВ, И.Г. ПОСПЕЛОВ

...ИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЕЖДУНАРОД НОЙ ...ГОВЛИ И ВАЛЮТНОГО ОБМЕНА

1. Моде... ...овли и валютного обмена между двумя странами

В работе [1] построена простейшая односекторная, од-
...про...стовая модель развивающейся экономики класси-
...ческого рыночного типа. Используем эту модель для опи-
...сания экономики каждой из двух торгующих между собой
стран. Сохраним обозначения работы [1] и ограничимся
...минимальными пояснениями, – все внимание сосредоточим
на новых элементах описаний, которые вносит учет торго-
...вли и валютного обмена между странами.

Пусть хозяйство каждой из стран сагрегировано в од-
...ну отрасль, которая выпускает однородный продукт, ис-
пользуемый и для расширения производства, и для пот-
ребления, и для экспорта. Выпуск продукта Y_i ограничен
суммарной мощностью хозяйства M_i (индекс $i = 1, 2$ от-
личает одну страну от другой) и определяется количест-
вом используемых в хозяйстве однородных трудовых ре-
сурсов R_i через производственную функцию

$$Y_i(t) = M_i(t) f_i(x_i), \qquad x_i(t) = \frac{R_i(t)}{M_i(t)}, \tag{1.1}$$

x ... $d\lambda$,

...

...яв... ...этся решением уравнения

x_i ... $d\lambda$.

Функция ...(λ) характеризует технологическую структуру
хозяйства ... распределение суммарной мощности по техно-
логиям ...азными нормами затрат труда λ, которые ис-