

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>1. Модель Полтеровича-Хенкина</b>	<b>6</b>
1.1 Описание модели . . . . .	6
1.2 Асимптотика решений . . . . .	7
1.3 Модель экономического роста . . . . .	9
1.4 Модель экономического роста с транзакционными издержками . . . . .	10
<b>2. Модификация модели Полтеровича-Хенкина</b>	<b>15</b>
2.1 Описание модифицированной модели . . . . .	15
2.2 Результаты численных экспериментов . . . . .	15
2.3 Анализ поведения модифицированной модели . . . . .	16
<b>3. Исследование аттрактора конечной цепочки Ленгмюра</b>	<b>20</b>
3.1 Некоторые сведения из теории рациональных аппроксимаций . . . . .	20
3.2 Аттрактор цепочки Ленгмюра . . . . .	30
<b>Приложение</b>	<b>44</b>

## Введение

Одним из центральных вопросов идеологических дискуссий последних десятилетий была проблема оценки влияния государственной политики на темпы научно-технического прогресса. Существуют полярные точки зрения. С одной стороны, либеральные экономисты, например Ф.А.Хайек, утверждают, что государственное вмешательство в экономические процессы нарушает таинство функционирования рынка и замедляет научно-технический прогресс, полагая, что только рынок может определить наиболее перспективные направления экономического развития. Это предположение используется как аргумент в критике социалистических доктрин. Его сторонники утверждают, что административное регулирование снижает экономические стимулы для распространения новых технологий. Такая проблема действительно существовала в советской экономике и попытки стимулировать распространение новых технологий за счет внеэкономических стимулов, таких как социалистическое соревнование, оказались малоэффективными.

С другой стороны, кейнсианская школа считает, что медленные процессы с характерными временами порядка десятилетий, к которым относятся процессы смены технологических укладов, плохо регулируются рыночными механизмами и что государственный спрос на инвестиции может способствовать научно-техническому прогрессу. Зависимость между внедрением научных открытий и большими циклами экономической конъюнктуры была обнаружена в работе Н.Д.Кондратьева "Большие циклы экономической конъюнктуры" (см. [4]). Глобальные государственные программы, такие как программа высадки человека на Луну "Аполлон" или программа СОИ, оказывали косвенное влияние на научно-технический прогресс. Предполагают, что программа "Аполлон" способствовала разработке и широкому внедрению компьютерных технологий, а программа военных приготовлений в рамках проекта СОИ включала в себя элемент государственной политики США в области развития промышленных технологий [2]. Административные методы регулирования экономики позволяют легче перераспределять ресурсы, чем это допускают рыночные механизмы. Так в СССР в 30-ые годы была осуществлена программа

индустриализации, которая позволила за счет ресурсов, накопленных в сельском хозяйстве, за короткий период времени создать военно-промышленный комплекс. Вопрос о том, насколько эффективны такие крупные программы зависит от оценок их косвенного влияния на научно-технический прогресс, которые в свою очередь зависят от его концепции и способов измерения.

Разные точки зрения на эффективность государственного регулирования обусловлены разными представлениями о научно-техническом прогрессе. Сторонники либеральных экономических взглядов предполагают, что научно-технический прогресс - это распространение небольших нововведений и новых технологий на микроуровне. Динамика этого процесса обусловлена внутренними причинами и не требует крупных централизованных денежных вложений. Сторонники кейнсианских и социалистических взглядов склонны рассматривать научно-технический прогресс как крупные структурные сдвиги в технологическом укладе, обусловленные внедрением научных открытий. Такие сдвиги не являются спонтанными и происходят, как правило, при реализации крупных государственных программ. Попытки установить с помощью эмпирических наблюдений, какие представления о научно-техническом прогрессе оказываются правильными с точки зрения влияния на экономическое развитие, не приводят к однозначным результатам. Дело в том, что не вполне ясно как измерять научно-технический прогресс. Косвенные способы измерения могут приводить к ложным выводам. Например, в СССР в 70-ые годы официальная пропаганда говорила о высоких темпах научно-технического прогресса. Основанием для такого утверждения являлась регистрируемая статистическими службами динамика процесса замещения труда капиталом. Однако в реальности эти статистические наблюдения были вызваны снижением качества выпускаемой продукции (подробнее см. [6]). Поэтому в сложившейся ситуации темп замещения труда капиталом не являлся мерой темпа научно-технического прогресса.

Приведенный пример показывает насколько актуальной задачей является переход от общих идеологических дискуссий, происходящих на концептуальном уровне, к систематическим исследованиям на языке математических моделей. Модель технологического развития отрасли, формализующая либеральные представления о научно-техничес-

ком прогрессе, была предложена В.М.Полтеровичем и Г.М.Хенкиным (мы будем называть ее моделью Полтеровича-Хенкина). Она использует концепцию распространения инноваций Дж.Шумпетера, который разделил механизм технологических сдвигов на две эндогенные компоненты: создание новых технологий, т.е. собственно инновационный процесс, и их заимствование, т.е. процесс имитации. Известно, что даже в монопродуктовых отраслях сосуществуют разноэффективные технологии. Эмпирические исследования показывают, что кривые распределения мощностей отрасли по уровням эффективности для разных моментов времени похожи друг на друга. Для некоторых отраслей наблюдается сходство между этими кривыми. Эти наблюдения нуждались в объяснении.

## 1. Модель Полтеровича-Хенкина

### 1.1 Описание модели

Рассматривается производственная система, предприятия которой распределены по уровням технологической эффективности  $n$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . Понятие уровня технологической эффективности может быть определено разными способами. В этом разделе мы не будем конкретизировать какой именно показатель имеется в виду, важно лишь, что каждое предприятие стремится перейти на уровень с более высоким номером. Обозначим через  $F_n(t)$  долю предприятий, находящихся в момент времени  $t$  на уровнях с номерами не выше  $n$ . Предполагается, что предприятие может переходить только на следующий более высокий уровень эффективности. Тогда убывание  $F_n(t)$  происходит за счет перехода предприятий  $n$ -ого уровня, доля которых составляет  $F_n - F_{n-1}$ , на  $(n+1)$ -ый уровень. Скорость убывания складывается из двух элементов: инновационной составляющей  $\alpha(F_{n-1} - F_n)$  и имитационной составляющей  $\beta(1 - F_n)(F_{n-1} - F_n)$ , которая пропорциональна доле более эффективных предприятий  $(1 - F_n)$ . Константы  $\alpha > 0$  и  $\beta > 0$  характеризуют интенсивности соответственно инновационного и имитационного процессов и считаются одинаковыми для каждого уровня эффективности. Таким образом, эволюция распределения предприятий по эффективности описывается следующей системой

дифференциально-разностных уравнений

$$\frac{dF_n}{dt} = (\alpha + \beta(1 - F_n))(F_n - F_{n-1}) + \alpha(F_{n-1} - F_n) + \beta(1 - F_n)(F_{n-1} - F_n), \quad (1.1)$$

с граничными и монотонными начальными условиями вида

$$F_0(t) \equiv 0; \quad 0 < F_{k-1} < F_k(0) < 1, \quad 1 < k < N; \quad F_k(0) = 1, \quad k \geq N. \quad (1.2)$$

## 1.2 Асимптотика решений

Положим

$$B(t) = \prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{\beta}{\alpha} (1 - F_k(t)) \right)$$

и рассмотрим семейство решений уравнения (1.1) на всей временной оси

$$F_n^*(t, A, \alpha, \beta) = \left( 1 + A \left( \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right)^n e^{\beta t} \right)^{-1}, \quad (1.3)$$

где константа  $A$  зависит от начального распределения (1.2). При фиксированном  $t$  решение (1.3) представляет собой логистическую кривую, форма которой определяется только константами  $\alpha$  и  $\beta$ . Эта кривая сдвигается в сторону увеличения эффективности с постоянной скоростью  $\beta / \ln \left( 1 + \frac{\beta}{\alpha} \right)$ , которая также не зависит от начального распределения.

Справедливо следующее важное предложение о поведении решения задачи (1.1), (1.2) при  $t \rightarrow \infty$ .

**Теорема 1.** (В.М.Полтерович, Г.М.Хенкин [7]). Пусть  $F_n$ ,  $1 \leq n < \infty$ , - решение задачи (1.1), (1.2). При  $A=B(0)$  выполняется следующая оценка

$$|F_n(t) - F_n^*(t, A, \alpha, \beta)| \leq K e^{-\gamma t}, \quad 0 \leq n < \infty, \quad t \geq T_0,$$

где  $K, \gamma, T_0$  - постоянные, зависящие от  $\alpha, \beta, B(0), N$ .

Итак, все решения задачи Коши (1.1), (1.2) асимптотически стремятся к решению (1.3). Это означает, что с течением времени распределение предприятий по эффективности независимо от начальных условий приобретает устойчивую форму, что согласуется с эмпирическими наблюдениями. Кроме того, скорость волнового решения

(1.3), к которому притягивается любое решение модели Полтеровича-Хенкина, можно интерпретировать как темп распространения новых технологий.

Таким образом, модель Полтеровича-Хенкина дает объяснение эмпирическим наблюдениям относительно формы кривой распределения предприятий по уровням эффективности и позволяет ввести понятие скорости распространения новых технологий. Модель позволила объяснить качественные особенности эволюции черной металлургии СССР в период с 1976 по 1988 года [1]. В то же время имеется ряд эмпирических фактов, которые не объясняются описанной выше моделью. Известны экономические системы, в которых не распространялись новые технологии. Более того, в рамках единой экономической системы в одной и той же отрасли могут независимо сосуществовать технологические уклады на разных уровнях эффективности так, что достижения более передового уклада практически не передаются менее эффективным<sup>1</sup>.

Для объяснения этих явлений требуется модифицировать исходную модель. В [8] В.М.Полтерович и Г.М.Хенкин предложили обобщение модели, в которой динамика распределения предприятий по уровням эффективности описывалась с помощью уравнения

$$\frac{dF_n}{dt} = \phi(F_n)(F_n - F_{n-1}). \quad (1.4)$$

Здесь  $\phi(F)$  - функция, описывающая интенсивность перехода на следующий уровень эффективности. В [8] доказано, что если  $\phi(F)$  монотонно убывающая функция, то справедлива теорема об асимптотике решений, аналогичная теореме 1. Если же функция  $\phi(F)$  не является монотонно убывающей функцией, то высказывается гипотеза, что асимптотика решений будет иметь несколько технологических укладов (подробнее см. в [11]).

В данной работе исследуется другая модификация, в которой сохраняется исходное предположение Дж.Шумпетера о разделении механизма технологических сдвигов на инновацию и имитацию, но модифицируется модельное описание имитационного процесса. Однако прежде, чем исследовать эту модифицированную модель, рассмотрим

---

<sup>1</sup>В этом случае можно говорить о многоукладности.

интерпретацию переменных исходной модели Полтеровича-Хенкина в терминах модели экономического роста и обсудим влияние транзакционных издержек на внедрение новых технологий.

### 1.3 Модель экономического роста

До сих пор число предприятий в модели считалось постоянным, а различия в их производительности игнорировались. В [8] была описана простейшая модель, учитывающая одновременно качественное совершенствование производственных мощностей в процессах имитации и инновации и количественный рост. Кроме того, было конкретизировано понятие уровня эффективности технологии. Пусть  $M_n$  - объем производственных мощностей, которые дают прибыль  $\lambda_n$  с каждой единицы мощности в единицу времени. Показатель  $\lambda_n$  принимается в качестве меры эффективности технологии уровня  $n$ . Считается, что с ростом  $n$  эффективность возрастает:  $\lambda_{n+1} > \lambda_n$ . Предполагается, что вся прибыль расходуется на расширение мощностей. Тогда можно определить функцию  $\mathcal{F} = \{F_n\}_0^\infty$  распределения мощностей по уровням эффективности

$$F_n = \left( \sum_{k=0}^n M_k \right) / \left( \sum_{k=0}^{\infty} M_k \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.5)$$

предполагая, что выражение справа имеет смысл. Будем считать, что прибыль  $\lambda_n M_n$ , получаемая на  $n$ -ом уровне, разделяется на два потока капитальных вложений: доля  $\varphi_n$  этой прибыли идет на создание мощностей следующего  $(n+1)$ -го уровня, а другая часть объемом  $(1 - \varphi_n)\lambda_n M_n$  тратится на расширение производства уровня  $n$ . С учетом этих предположений составляется уравнение экономического роста

$$\frac{dM_n}{dt} = (1 - \varphi_n)\lambda_n M_n + \varphi_{n-1}\lambda_{n-1}M_{n-1}, \quad (1.6)$$

здесь  $\varphi_n = \varphi(F_n) = \alpha + \beta(1 - F_n)$ ,  $\alpha, \beta > 0$ , а граничное и начальное условия имеют вид

$$M_0(t) \equiv 0; \quad M_n(0) \geq 0, \sum_{n=1}^N M_n(0) > 0; \quad M_n(0) = 0, n > N, \quad (1.7)$$

где  $N$  - некоторое положительное число. Относительно последовательности  $\lambda_n$  предполагаются выполненными следующие условия

- (a)  $\{\lambda_n\}_0^\infty$  положительна, строго возрастает и сходится к пределу  $\lambda$ ,  
 (b)  $\{\lambda_n\}_0^\infty$  удовлетворяет неравенству

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(\lambda - \lambda_k) < \infty.$$

Эти предположения соответствуют представлениям о распространении новых технологий в "зрелой" отрасли.

**Теорема 2 (В.М.Полтерович, Г.М.Хенкин [8]).** Пусть выполнены условия (a), (b) и последовательность  $\mathcal{F} = \{F_n\}$  определяется по решениям задачи (1.6), (1.7) по формуле (1.5). Тогда найдется константа  $d$  такая, что

$$\sup_n |F_n(t) - F_n^*(t, d, \lambda\alpha, \lambda\beta)| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \quad (1.8)$$

где  $F_n^*$  - функция, указанная в теореме 1.

Отсюда следует, что эволюция кривой распределения для "зрелой" отрасли (при медленном росте эффективности из условия (b)) описывается уравнением вида (1.1); это уравнение определяет асимптотику траекторий рассматриваемой модели и скорость смещения эволюционной кривой вправо, равную  $\lambda\beta / \ln(1 + \frac{\beta}{\alpha})$ .

#### 1.4 Модель экономического роста с транзакционными издержками

Обсудим теперь вопрос о том, как влияют транзакционные издержки на скорость распространения новых технологий. Хотя природа этих издержек может быть различной<sup>2</sup>, с точки зрения предприятия они означают утрату определенной доли прибыли. Как уже было сказано во введении, существуют две полярные точки зрения на роль государства в развитии научно-технического прогресса. Хотелось бы понять, - а в идеале уметь количественно оценивать - как вмешательство государства в процессы на микроуровне может повлиять на развитие

<sup>2</sup>В транзакционные издержки входят, например, государственные налоги, а так же потери предприятий от рэкета и коррупции.



научно-технического прогресса на макроуровне. Для этого учтем, что осуществление государством крупных проектов научно-технического развития ложится налоговым бременем на "зрелые" отрасли. Чем больше масштабы проектов и чем больше средств уже израсходовано на их осуществление, тем выше транзакционные издержки таких отраслей.

Рассмотрим модификацию модели роста, учитывающую транзакционные издержки. Введем в модель роста еще одну переменную. Обозначим через  $Q(t)$  денежные средства, полученные от отрасли на осуществление государственных программ к моменту времени  $t$ . Будем считать, что для отрасли эти расходы являются чистыми транзакционными издержками и что изымаемая в момент времени  $t$  у предприятий отрасли доля прибыли пропорциональна величине  $\frac{Q(t)}{Q(t)+M(t)}$ , где  $M(t) = \sum_{k=0}^{\infty} M_k(t)$  есть суммарная мощность всей отрасли. Тогда модель роста запишется в следующем виде

$$\begin{cases} \frac{dM_n}{dt} = \left[ (1 - \varphi_n) \left( \frac{Q}{Q+M} - \varphi_n \right)_+ \right] \lambda_n M_n + \left( \varphi_{n-1} - \frac{Q}{Q+M} \right)_+ \lambda_{n-1} M_{n-1} \\ \frac{dQ}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q}{Q+M} \lambda_n M_n. \end{cases} \quad (1.9)$$

Здесь  $(u)_+ \equiv \max(u, 0)$ . К начальному и граничному условиям (1.7) добавляется начальное условие  $Q(0) = Q_0 > 0$ .

**Предложение 1.** *Отношение  $\frac{Q(t)}{M(t)}$  является первым интегралом системы (1.9).*

*Доказательство.* Убедимся в том, что ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} M_k(t)$  сходится, т.е. функция  $M(t)$  определена при  $t > 0$ . Заметим, что для любых чисел  $a$  и  $b$  справедливо равенство  $(b - a)_+ - (a - b)_+ = b - a$ . Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{dM_k}{dt} &= \sum_{k=1}^n \left( (1 - \varphi_k) \left( \frac{Q}{Q+M} - \varphi_k \right)_+ \right) \lambda_k M_k + \left( \varphi_{k-1} - \frac{Q}{Q+M} \right)_+ \lambda_{k-1} M_{k-1} = \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left( (1 - \varphi_k) + \left( \varphi_k - \frac{Q}{Q+M} \right)_+ \right) \lambda_k M_k + \left( (1 - \varphi_n) + \left( \varphi_n - \frac{Q}{Q+M} \right)_+ \right) \lambda_n M_n = \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{M}{Q+M} \lambda_k M_k + \left( (1 - \varphi_n) + \left( \varphi_n - \frac{Q}{Q+M} \right)_+ \right) \lambda_n M_n. \end{aligned}$$

Эти преобразования позволяют сделать оценку

$$\sum_{k=1}^n \frac{dM_k(t)}{dt} \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k M_k(t) < \lambda \sum_{k=1}^n M_k(t).$$

По лемме Гроннуола-Беллмана из последнего неравенства вытекает следующая цепочка неравенств

$$\sum_{k=1}^n M_k(t) \leq \sum_{k=1}^n M_k(0)e^{\lambda t} \leq M(0)e^{\lambda t},$$

из которой в силу неотрицательности  $M_k(t), k = 1, 2, \dots$ , следует поточечная сходимость ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} M_k(t) = M(t)$ , а также возможность его почленного дифференцирования для любого конечного  $t > 0$ .

Необходимым условием существования  $M(t)$  является сходимость  $M_n(t) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Следовательно

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n M_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M}{Q+M} \lambda_k M_k = \frac{dM}{dt}. \quad (1.10)$$

Тогда

$$\frac{d(Q/M)}{dt} = \frac{1}{M} \frac{dQ}{dt} - \frac{Q}{M^2} \frac{dM}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Q}{Q+M} \lambda_k M_k - \frac{Q}{M^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M}{Q+M} \lambda_k M_k = 0,$$

Предложение доказано.

Из этого предложения следует, что отношение  $\frac{Q(t)}{Q(t)+M(t)}$  не меняется во времени,  $\frac{Q(t)}{Q(t)+M(t)} \equiv \frac{Q_0}{Q_0+M(0)}$ .

В уравнениях (1.9) положим

$$\varphi_n = \varphi(F_n) = \alpha + \beta(1 - F_n), \quad 0 \leq \alpha \leq \varphi(F_n) \leq \alpha + \beta \leq 1.$$

То есть мы будем придерживаться гипотезы Шумпетера,  $\alpha$  и  $\beta$  по-прежнему, соответственно, инновационная и имитационная константы. Рассмотрим теперь, как транзакционные издержки влияют на процесс распространения новых технологий. Справедлив следующий результат.

**Теорема 3.** Пусть выполнены условия (а),(b) и последовательность  $\mathcal{F} = \{F_n\}$  определяется по решениям задачи (1.9),(1.7) по формуле (1.5). Тогда

1) если  $\frac{Q}{Q+M} < \alpha$ , то найдется такая константа  $d$ , что последовательность  $\{F_n\}$ , удовлетворяет неравенству

$$\sup_n |F_n(t) - F_n^*(t, d, \lambda \left( \alpha - \frac{Q}{Q+M} \right), \lambda \beta)| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \quad (1.11)$$

где  $F_n^*$  - функция из теоремы 1;

2) если  $\alpha \leq \frac{Q}{Q+M}$ , то  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M_N(t)}{M(t)} = 1$ . Более того,  $M_k(t) \equiv 0$  при  $k > N$ .

*Доказательство.* Рассмотрим 3 возможных случая.

1. Пусть  $\frac{Q}{Q+M} < \alpha$ . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{dM_k}{dt} &= (1 - \alpha - \beta(1 - F_k))\lambda_k M_k + (\alpha \frac{Q}{Q+M} + \beta(1 - F_{k-1}))\lambda_{k-1} M_{k-1} = \\ &= \frac{M}{Q+M} \left[ (1 - (\alpha \frac{Q}{Q+M}) \frac{Q+M}{M} - \beta \frac{Q+M}{M} (1 - F_k)) \lambda_k M_k + \right. \\ &+ \left. ((\alpha \frac{Q}{Q+M}) \frac{Q+M}{M} + \beta \frac{Q+M}{M} (1 - F_{k-1})) \lambda_{k-1} M_{k-1} \right]. \end{aligned}$$

Если обозначить  $\alpha' = (\alpha \frac{Q}{Q+M}) \frac{Q+M}{M}$ ,  $\beta' = \beta \frac{Q+M}{M}$  и изменить масштаб времени  $t_{new} = \frac{M}{Q+M} t$ , то получим уравнение (1.6) с  $\varphi_n = \alpha' + \beta'(1 - F_n)$ , для которого справедлива теорема 2. Переходя к исходному временному масштабу, получаем утверждение 1).

2. Пусть  $\frac{Q}{Q+M} \geq \alpha + \beta$ . В этом случае  $\frac{dM_k}{dt} = (1 - \frac{Q}{Q+M}) \lambda_k M_k$ , т.е. система (1.9) распалась на независимые линейные уравнения. Решением такой системы является набор функций

$$M_k(t) = M_k(0) e^{(1 - \frac{Q}{Q+M}) \lambda_k t}, k = 1, \dots, N; \quad M_k(t) \equiv 0, k > N.$$

Поскольку  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N$ ,  $M_N(t)$  обладает максимальным экспоненциальным ростом, откуда  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M_N(t)}{M(t)} = 1$ .

3. Пусть  $\alpha + \beta > \frac{Q}{Q+M} \geq \alpha$ .

В этом случае, учитывая, что  $F_k(0) = 1, k \geq N, M_n(0) = 0, n > N$ , имеем

$$\begin{aligned} \frac{dM_n}{dt} &= 0, \text{ при } n > N; \\ \frac{dM_N}{dt} &= \frac{M}{Q+M} \lambda_N M_N + \left( \alpha + \beta(1 - F_{N-1}) - \frac{Q}{Q+M} \right) \lambda_{N-1} M_{N-1} \quad (1.12) \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\frac{d(M_N/M)}{dt} = \frac{1}{M} \frac{dM_N}{dt} - \frac{M_N}{M^2} \frac{dM}{dt}.$$

Тогда, учитывая (1.10) и (1.12), получаем

$$\begin{aligned} \frac{d(M_N/M)}{dt} &\geq \frac{M}{Q+M} \lambda_N \frac{M_N}{M} - \frac{M_N}{M} \frac{1}{M} \frac{M}{Q+M} \sum_{k=1}^N \lambda_k M_k = \\ &= \frac{M_N}{M} \frac{1}{Q+M} \left[ \sum_{k=1}^N (\lambda_N - \lambda_k) M_k \right] = \frac{M_N}{M} \frac{M}{Q+M} \left[ \sum_{k=1}^N (\lambda_N - \lambda_k) \frac{M_k}{M} \right]. \end{aligned}$$

Обозначим  $\delta = \min(\lambda_N - \lambda_k | k=1, \dots, N-1)$ . Заметим, что  $\delta > 0$ , т.к. последовательность  $\{\lambda_n\}_0^\infty$  является строго возрастающей. Предположим, что  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M_N(t)}{M(t)} \neq 1$ . Тогда  $\frac{M_N(t)}{M(t)} < 1, t \geq 0$  в силу определения  $M_N(t)$  и  $M(t)$ . Отсюда

$$\frac{d(M_N/M)}{dt} \geq \frac{M_N}{M} \frac{M}{M+Q} \left(1 - \frac{M_N}{M}\right) \delta \geq c \frac{M_N}{M},$$

где  $c = \delta \frac{M(0)}{M(0)+Q_0} \min_{t \geq 0} \left(1 - \frac{M_N(t)}{M(t)}\right) > 0$ . Следовательно, по лемме Гроннуола-Беллмана

$$\frac{M_N(t)}{M(t)} \geq \frac{M_N(0)}{M(0)} e^{ct}.$$

Значит, начиная с некоторого момента времени,  $\frac{M_N(t)}{M(t)} > 1$ , чего не может быть по определению  $M(t)$  и  $M_N(t)$ . Полученное противоречие доказывает, что  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M_N(t)}{M(t)} = 1$ . Теорема 3 полностью доказана.

Из теоремы 3 следует, что транзакционные издержки уменьшают скорость распространения новых технологий. С течением времени она приближается к величине  $\lambda\beta / \ln\left(1 + \frac{\beta}{\alpha} \frac{Q}{Q/(M+Q)}\right)$ . Если доля прибыли  $\frac{Q}{M+Q}$ , изымаемая у предприятий отрасли превышает некоторое пороговое значение - размер инновационной константы  $\alpha$ , то научно-технический прогресс на микроуровне останавливается.

## 2. Модификация модели Полтеровича-Хенкина

### 2.1 Описание модифицированной модели

Рассмотрим модификацию модели Полтеровича-Хенкина, в которой имитационная составляющая имеет вид  $\beta(F_{n+1} - F_n)(F_{n-1} - F_n)$ , т.е. предприятия могут имитировать не любую более передовую технологию, а лишь технологии соседнего более высокого уровня эффективности. Тогда система, описывающая эволюцию распределения предприятий по эффективности, примет вид

$$\frac{dF_n}{dt} = \alpha(F_{n-1} - F_n) + \beta(F_{n+1} - F_n)(F_{n-1} - F_n). \quad (2.1)$$

Начальные и граничные условия такие же, (1.2).

При  $\beta = 0$  получаем линейную систему

$$\frac{dF_n}{dt} = \alpha(F_n(t) - F_{n-1}(t)), \quad (2.2)$$

решение которой выписывается в явном виде

$$\begin{aligned} F_1(t) &= e^{\alpha t} F_1(0) \\ F_2(t) &= e^{\alpha t} (\alpha t F_1(0) + F_2(0)) \\ &\dots \\ F_k(t) &= e^{\alpha t} \left( \frac{(\alpha t)^{k-1}}{(k-1)!} F_1(0) + \dots + \alpha t F_{k-1}(0) + F_k(0) \right) \\ &\dots \end{aligned}$$

и представляет собой бегущую в сторону роста эффективности волну.

### 2.2 Результаты численных экспериментов

Численное решение задачи Коши (2.1),(1.2) для модифицированной модели, при различных начальных распределениях и разных значениях параметров  $\alpha$  и  $\beta$  показывает, что по-прежнему скорость перехода на более эффективные технологии увеличивается за счет процесса имитации, однако, эта скорость значительно ниже, чем в модели Полтеровича-Хенкина. Этот факт иллюстрируют все рисунки, приведенные в приложении в конце работы. Они показывают, что за одно и

то же время распределение исходной модели сдвигается вдоль оси  $n$  гораздо быстрее распределения модифицированной модели. Объясняется это тем, что скорость имитации теперь зависит от доли предприятий только  $(n + 1)$ -ого уровня.

Кроме того, на больших временах численные решения модифицированной модели имеют качественно иное поведение, чем решения исходной модели. С течением времени распределение не становится похожим на логистическое (особенно отчетливо это можно наблюдать при  $\alpha \ll \beta$ ). В расчетах мы брали  $\alpha = 0.01, \beta = 5$ . На рисунках 1, 2, 3 приведены расчеты для различных начальных условий. Распределение имеет многоступенчатый вид, причем число ступенек и их высоты зависят от начального распределения. В плотностях, т.е. в переменных  $(f_n = F_n - F_{n-1})$  (см. рисунки 4, 5, 6), это несколько максимумов разной высоты, которые сдвигаются вдоль оси  $n$  независимо друг от друга и постепенно размываются, в отличие от одного максимума в модели Полтеровича-Хенкина.

### 2.3 Анализ поведения модифицированной модели

Для объяснения этих различий необходимо понять как асимптотически ведут себя решения новой задачи Коши при  $\alpha = 0$ , т.е. когда технологии распространяются только за счет имитации.

Но сначала проанализируем, как ведет себя исходная модель при  $\alpha = 0$ . Уравнение (1.1) примет вид

$$\frac{dF_n}{dt} = \beta(1 - F_n)(F_n(t) - F_{n-1}),$$

и, учитывая начальные условия (1.2), получаем конечную систему  $N$ -ого порядка

$$\begin{aligned} \frac{dF_1}{dt} &= \beta(1 - F_1)F_1 \\ \frac{dF_n}{dt} &= \beta(1 - F_n)(F_n(t) - F_{n-1}), \quad n = 2, \dots, N. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Все остальные переменные, начиная с  $F_{N+1}$ , тождественно равны единице. Эта система имеет неподвижные точки

$$(0, \dots, 0), (0, \dots, 0, 1), (0, \dots, 0, 1, 1), \dots, (1, \dots, 1).$$

Однако устойчивой является только точка  $(0, \dots, 0)$ . Действительно, линеаризуем систему (2.3) в этой точке

$$\begin{aligned}\frac{dF_1}{dt} &= \beta F_1(t) \\ \frac{dF_n}{dt} &= \beta(F_n(t) - F_{n-1}(t)), \quad n = 2, \dots, N.\end{aligned}$$

Получили линейную систему (2.2), решение которой выписано выше, и из него следует асимптотическая устойчивость линеаризованной системы в точке  $(0, \dots, 0)$ . По теореме о линеаризации эта точка является асимптотически устойчивой и для системы (2.3).

Все остальные неподвижные точки не являются устойчивыми. Действительно, решения уравнения (2.1) в любой момент времени образуют распределение<sup>3</sup>, поэтому все правые части системы (2.3) неположительны. Следовательно, все  $F_n(t)$  не возрастают, поэтому ни одно из них не может стремиться к единице. Таким образом, в модели Полтеровича-Хенкина процесс имитации сходится к единичной "ступеньке".

Положим  $\alpha = 0$  в модифицированном уравнении (2.1). Снова с учетом начальных условий (1.2) имеем систему  $N$ -ого порядка. Замена переменных  $\tau = \beta t$ ,  $c_n(t) = F_{N+1-n}(t) - F_{N-n}(t)$  приводит к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{c}_1 &= c_1 c_2 \\ \dot{c}_n &= c_n(c_{n+1} - c_{n-1}), \quad n = 2, \dots, N-1, \\ \dot{c}_N &= c_N c_{N-1}\end{aligned}\tag{2.4}$$

$$c_n(0) = \gamma_n > 0, \quad n = 1, \dots, N,$$

которую принято называть *конечной цепочкой Ленгмюра*. Цепочка Ленгмюра первоначально возникла при описании явлений в физике плазмы. В [3] показано, что она является дискретным аналогом уравнения КдФ. В [9] цепочка Ленгмюра называется моделью Вольтерра, при этом она интерпретируется как иерархическая экосистема хищников - жертв.

---

<sup>3</sup>Этот факт доказан в [7] для всех  $\alpha > 0$ ; доказательство верно и в рассматриваемом случае при  $\alpha = 0$ .

**Предложение 2.** Все фазовые траектории задачи Коши (2.4) лежат в положительном ортанте фазовой плоскости, т.е.  $c_n(t) > 0$ ,  $n = 1, \dots, N$ ,  $t \geq 0$ .

*Доказательство.* Предположим противное. Пусть  $n_0$  - номер переменной, которая первой достигла нулевого значения. Обозначим момент времени, когда это произошло, через  $t_0$ . В силу системы имеем

$$\sum_{k=1}^N c_k(t) \equiv \text{const} > 0,$$

$\ln(c_{n_0}(t)) = \int_0^t (c_{n_0+1}(\tau) - c_{n_0-1}(\tau)) d\tau$ . В момент времени  $t_0$  в последнем равенстве слева стоит  $-\infty$ , а справа конечная величина. Полученное противоречие доказывает предложение.

**Предложение 3.** Все устойчивые неподвижные точки системы (2.4) имеют вид:

$$\begin{aligned} & (y_1, 0, y_2, 0, \dots, y_k, 0), \quad \text{если } N=2k, \\ & (y_1, 0, y_2, 0, \dots, 0, y_{k+1}), \quad \text{если } N=2k+1, \end{aligned}$$

где  $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_k (\geq y_{k+1}) \geq 0$ .

*Доказательство.* Неподвижные точки этой системы имеют вид

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} & (0, x_1, 0, x_2, \dots, 0, x_k) \\ & (y_1, 0, y_2, 0, \dots, y_k, 0) \end{aligned} \right\} \text{если } N=2k; \\ & \left. \begin{aligned} & (0, x_1, 0, x_2, \dots, x_k, 0) \\ & (y_1, 0, y_2, 0, \dots, 0, y_{k+1}) \end{aligned} \right\} \text{если } N=2k+1. \end{aligned}$$

Собственные числа матрицы линеаризованной системы в точках вида  $(0, x_1, 0, x_2, \dots, 0, x_k)$ ,  $(0, x_1, 0, x_2, \dots, x_k, 0)$  равны соответственно  $\{x_1, 0, x_2 - x_1, 0, x_3 - x_2, 0, \dots, 0, x_k - x_{k-1}, 0\}$ ,  $\{x_1, 0, x_2 - x_1, \dots, x_k - x_{k-1}, x_k - x_{k-2}, 0, \dots, x_k\}$ , а в точках вида  $(y_1, 0, y_2, 0, \dots, y_k, 0)$  и  $(y_1, 0, y_2, 0, \dots, 0, y_{k+1})$  соответственно  $\{0, y_2 - y_1, 0, \dots, y_k - y_{k-1}, y_k - y_{k-2}, 0, \dots, y_k\}$  и  $\{0, y_2 - y_1, 0, \dots, 0, y_{k+1} - y_k, 0\}$ .

По теореме о линеаризации необходимым условием устойчивости неподвижных точек является неотрицательность вещественных частей всех собственных значений матриц линеаризованной системы в этих точках. В нашем случае это означает, что  $0 \geq x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_k$ ,



$y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_k (\geq y_{k+1}) \geq 0$ . Из предыдущего предложения следует, что первая цепочка неравенств выполняется только в единственном случае, когда  $x_1 \equiv x_2 \equiv \dots \equiv x_k \equiv 0$ , который является частным случаем для второй цепочки неравенств. Предложение доказано.

Из вида неподвижных точек следует, что среди них нет ни одной изолированной, поэтому асимптотической устойчивости не будет.

Точное решение конечной цепочки Ленгмюра известно, в [5] эта система проинтегрирована методом L-A пары (представление Лакса) с использованием теории рациональных аппроксимаций Паде, ортогональных многочленов и непрерывных цепных дробей.

**Теорема 4 (J.Moser [12], Е.М.Никишин, В.Н.Сорокин [5]).**  
*Если  $c_n(t)$  - решение конечной цепочки Ленгмюра (2.4), то справедливы соотношения*

$$\frac{1}{z \frac{c_1(t)}{z \frac{c_2(t)}{z \dots \frac{c_N(t)}{z}}}} = \frac{\sum_{n=0}^N \frac{m_n e^{\lambda_n^2 t}}{z \lambda_n}}{\sum_{n=0}^N m_n e^{\lambda_n^2 t}}. \quad (2.5)$$

Здесь не зависящие от времени<sup>4</sup>  $\lambda_n$ ,  $m_n$  ( $m_0 + m_1 + \dots + m_N = 1$ ) определяются начальными данными  $c_n(0)$ , если разложить при этих значениях цепную дробь на сумму простых дробей. Затем, чтобы получить решение при любом  $t$ , нужно подставить это значение времени в правую часть (2.5) и представить сумму простых дробей в виде цепной дроби, на соответствующих местах будут находиться решения  $c_n(t)$ . Похожая процедура используется при интегрировании нелинейных уравнений в частных производных методом обратной задачи рассеяния. Здесь аналогом данных рассеяния являются  $\{\lambda_n, \tilde{m}_n(t) | n = 0, 1, \dots, N\}$ , где

$$\tilde{m}_n(t) = \frac{m_n e^{\lambda_n^2 t}}{\sum_{k=0}^N m_k e^{\lambda_k^2 t}}.$$

---

<sup>4</sup>Доказательство того, что  $\lambda_n, n = 0, \dots, N$  не зависят от времени является стандартным для метода L-A пары, см. [5, стр. 106-107].

### 3. Исследование аттрактора конечной цепочки Ленгмюра

Нас интересуют аттракторы системы (2.4). Заметим, что цепочка Ленгмюра является нелинейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка с квадратичной нелинейностью. Аттракторы таких систем могут быть устроены очень сложно - могут возникать предельные циклы, странные аттракторы - и найти их удастся лишь в редких случаях.

Как правило, исследование асимптотического поведения решений нелинейных дифференциальных уравнений представляет собой отдельную, часто весьма нетривиальную, задачу. Для того, чтобы доказать основной результат об асимптотическом поведении цепочки Ленгмюра, нам потребовались некоторые понятия теории ортогональных многочленов, проблемы моментов, непрерывных цепных дробей и соотношения между ними.

#### 3.1 Некоторые сведения из теории рациональных аппроксимаций

Рассмотрим конечную неотрицательную борелевскую меру  $\mu(dx)$ , суммируемую на всей действительной оси.

Каждой мере  $\mu(dx)$  сопоставим *марковскую* функцию

$$\hat{\mu}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu(dx)}{z-x}.$$

Обозначим через  $S_\mu$  множество точек роста меры  $\mu$  и положим  $\mu(\infty)=0$ . Тогда марковская функция такой меры определена и аналитична в области  $\bar{C} \setminus S_\mu$ . Разложим марковскую функцию в ряд Лорана в бесконечно удаленной точке

$$\hat{\mu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{z^{n+1}},$$

где  $s_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \mu(dx)$  — степенные моменты меры  $\mu(dx)$ .

Заметим, что при любом фиксированном  $t \geq 0$  правая часть формулы (2.5) для точного решения цепочки Ленгмюра представляет собой

марковскую функцию единичной дискретной меры с конечным числом точек роста  $N+1$

$$\mu(dx) = \sum_{k=0}^N \tilde{m}_k \delta(x - \lambda_k), \quad (3.1)$$

где  $\sum_{k=0}^N \tilde{m}_k = 1, \tilde{m}_0 > 0, \dots, \tilde{m}_N > 0^5$ . Поэтому в дальнейшем в этом разделе будем рассматривать только единичные меры,  $\mu(\mathbf{R}) = 1$ , т.е.  $s_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(dx) = 1$ . Отдельно будем оговаривать случай дискретных мер с конечным числом точек роста.

По мере  $\mu$  можно из линейно независимой системы  $1, z, z^2, \dots$  процессом ортогонализации Гильберта-Шмидта построить последовательность *ортонормированных* относительно меры  $\mu$  многочленов  $\{Q_n(z)\}$  таких, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q_n(x) Q_m(x) \mu(dx) = \delta_{nm} \quad (3.2)$$

и коэффициент при старшей степени многочленов  $Q_n$  положителен. Такая система ортонормированных многочленов определяется однозначно. В случае меры с конечным числом точек роста  $J$  мы имеем конечномерное пространство полиномов с  $J$ -мерным базисом  $1, z, \dots, z^{J-1}$ . Тогда в результате процесса ортогонализации Грамма-Шмидта мы получим ровно  $J$  ортонормированных многочленов, все остальные будут совпадать с их линейными комбинациями почти всюду по мере  $\mu$ . Поэтому, если в предложениях 4, 5, 6 число точек роста меры  $\mu(\cdot)$  конечно и равно  $J$ , то будем рассматривать только многочлены степени не выше  $J-1$  и считать, что степень  $n$  рассматриваемых многочленов меняется от 0 до  $J-1$ .

Формулировки и схемы доказательств предложений 4, 5, 6 следуют утверждениям 5.2, 5.1, 5.3 из [5], соответственно. Поэтому для каждого из указанных предложений мы приводим точную ссылку на источник. Отличие, однако, заключается в том, что мы дополнительно учитываем случай мер с конечным числом точек роста, который имеет свои особенности по сравнению с мерами с бесконечным спектром, рассмо-

---

<sup>5</sup>Здесь  $\tilde{m}_k = \tilde{m}_k(t) = \frac{m_k e^{\lambda_k^2 t}}{\sum_{j=0}^N m_j e^{\lambda_j^2 t}}$ , а  $t$  можно трактовать как параметр.

тренными в [5]. Кроме того, мы явно не используем понятие и свойства положительной последовательности.

**Предложение 4.** ([5], стр. 64) *Коэффициенты ортонормированных многочленов можно выразить через степенные моменты меры  $\mu$ . Справедливы соотношения*

$$Q_n(z) = \frac{1}{\sqrt{H_{n+1}H_n}} \begin{vmatrix} s_0 & \dots & s_n \\ \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & \dots & s_{2n-1} \\ 1 & \dots & z^n \end{vmatrix}. \quad (3.3)$$

Здесь  $H_0 = 1$ ,

$$H_n = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & \dots & s_{2n-2} \end{vmatrix}, n = 1, 2, \dots, \text{ определители Ганкеля.}$$

*Доказательство.* Заметим, что если мера  $\mu$  имеет бесконечное число точек роста, то  $H_n > 0, n = 1, 2, \dots$ . Если же число точек роста меры  $\mu$  конечно и равно  $J$ , то  $H_n > 0, n = 1, \dots, J$ , и  $H_n = 0$  для всех остальных  $n$ . Действительно, возьмем любой многочлен  $(n-1)$ -ой степени  $\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$  и рассмотрим следующую неотрицательную квадратичную форму

$$0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \right)^2 \mu(dx) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i,j=0}^{n-1} a_i a_j x^{i+j} \mu(dx) = \sum_{i,j=0}^{n-1} a_i a_j s_{i+j}.$$

Если мера  $\mu$  имеет бесконечное число точек роста, то эта квадратичная форма является строго положительно определенной, и, следовательно, по критерию Сильвестра определитель матрицы этой формы - в данном случае это  $n$ -ый определитель Ганкеля - тоже является положительным. Если же число точек роста меры  $\mu$  конечно и равно  $J$ , то для всех  $n > J$  квадратичная форма является вырожденной по мере  $\mu$ , т.е. найдется такой многочлен  $n$ -ой степени, на котором эта квадратичная форма обращается в ноль. Поэтому по критерию Сильвестра определители Ганкеля порядка не выше  $J$  положительны, а все последующие равны нулю.

Обозначим через  $Q_n^*(z)$  правую часть (3.3). Вычисляя  $\int_{-\infty}^{+\infty} Q_n^*(x) x^k \mu(dx)$  для  $k < n$ , получим равный нулю определитель (с двумя одинаковыми

строками). Старший коэффициент многочлена  $Q_n^* = \sqrt{H_n/H_{n+1}} > 0$ , т.е.  $\deg Q_n^* = n$ . И, наконец,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q_n^*(x)^2 \mu(dx) = \frac{H_n}{H_{n+1}H_n} \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{vmatrix} s_0 & \dots & s_n \\ \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & \dots & s_{2n-1} \\ x^n & \dots & x^{2n} \end{vmatrix} \mu(dx) = 1.$$

Таким образом, многочлены  $Q_n^*$  ортонормированы, поэтому из их единственности следует, что  $Q_n = Q_n^*$ .

**Предложение 5.** ([5], стр. 63) *Все нули многочленов, ортонормированных относительно меры  $\mu$ , действительные и простые.*

*Доказательство.* Пусть  $x_1, \dots, x_k$  - все различные действительные нули нечетной кратности многочлена  $Q_n$ . Тогда  $0 \leq k \leq n$  и

$$T(x) = Q_n(x)(x - x_1) \dots (x - x_k) \geq 0, x \in \mathbf{R}.$$

Далее,  $T(x) \not\equiv 0$ , а число различных действительных нулей многочлена  $T(x)$  меньше, чем число точек роста меры  $\mu(\cdot)$ . Поэтому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} T(x) \mu(dx) > 0.$$

С другой стороны, если  $k < n$ , то из формулы (3.3) получаем, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} T(x) \mu(dx) = 0.$$

Следовательно, ортонормированный многочлен  $Q_n$  имеет ровно  $n$  различных действительных корней.

Рассмотрим многочлены *второго рода* для  $Q_n$  (относительно меры  $\mu$ )

$$P_n(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Q_n(z)}{z} \frac{Q_n(x)}{x} \mu(dx), \quad \deg P_n(z) = n - 1. \quad (3.4)$$

**Предложение 6.** ([5], стр. 64-65) *Ортонормированные многочлены  $Q_n$  и многочлены второго рода  $P_n$  удовлетворяют рекуррентным формулам*

$$\begin{aligned} zP_n(z) &= h_n P_{n+1}(z) + v_n P_n(z) + h_{n-1} P_{n-1}(z), \\ P_{-1} &= 1, \quad P_0 = 0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} zQ_n(z) &= h_n Q_{n+1}(z) + v_n Q_n(z) + h_{n-1} Q_{n-1}(z), \\ Q_{-1} &= 0, \quad Q_0 = 1. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Здесь

$$h_n = \frac{\sqrt{H_n H_{n+2}}}{H_{n+1}} > 0, \quad h_{-1} = -1, \quad v_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x Q_n^2(x) \mu(dx).$$

*Доказательство.* Положим  $Q_{-1} = 0$ . По формуле (3.3)  $Q_0 = 1$ . Разложим многочлен  $zQ_n(z)$  по базису  $Q_0, \dots, Q_{n+1}$ :

$$zQ_n(z) = h_{n+1}^{(n)} Q_{n+1}(z) + v_n Q_n(z) + h_n^{(n)} Q_{n-1}(z) + \sum_{k=2}^n d_k Q_{n-k}(z).$$

Найдем коэффициенты разложения

$$d_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x Q_n(x) Q_{n-k}(x) \mu(dx) = 0, \quad k = 2, \dots, n,$$

так как  $\deg zQ_{n-k}(z) \leq n-1$ .

$$h_{n+1}^{(n)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x Q_n(x) Q_{n+1}(x) \mu(dx) = \frac{\sqrt{H_n H_{n+2}}}{H_{n+1}} = h_n,$$

$$h_n^{(n)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x Q_n(x) Q_{n-1}(x) \mu(dx) = \frac{\sqrt{H_{n-1} H_{n+1}}}{H_n} = h_{n-1}.$$

Таким образом, соотношения (3.6) доказаны.

Из формул (3.3), (3.4) следует, что  $P_0 = 0$ ,  $Q_1(z) = (z - s_1)/\sqrt{H_2}$ , т.к.  $H_1 = s_0 = 1$ . Тогда

$$P_1(z) = \frac{1}{\sqrt{H_2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(dx) = \frac{1}{\sqrt{H_2}} = \frac{1}{h_0}.$$

Положим  $P_{-1} = 1$ ,  $h_{-1} = -1$ , тогда соотношение (3.5) верно при  $n = 0$ . Далее, согласно (3.4) и доказанному (3.6) имеем

$$\begin{aligned} h_n P_{n+1}(z) + v_n P_n(z) + h_{n-1} P_{n-1}(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{zQ_n(z)}{z} \frac{xQ_n(x)}{x} \mu(dx) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(zQ_n(z) - zQ_n(x)) + (zQ_n(x) - xQ_n(x))}{z - x} \mu(dx) = \end{aligned}$$

$$z \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Q_n(z)}{z} \frac{Q_n(x)}{x} \mu(dx) + \int_{-\infty}^{+\infty} Q_n(x) \mu(dx) = zP_n(z).$$

Трёхдиагональная матрица

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} v_0 & h_0 & & & \\ h_0 & v_1 & h_1 & & \mathbf{O} \\ & h_1 & v_2 & h_2 & \\ \mathbf{O} & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

с действительными  $v_n$  и положительными  $h_n$  называется *матрицей Якоби*.

Как связаны между собой марковская функция меры  $\mu$  и построенные по этой мере ортогональные многочлены  $Q_n$  и многочлены второго рода  $P_n$ ? Оказывается, что справедливы следующие соотношения

$$Q_n(z)\hat{\mu}(z) - P_n(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right) \quad (3.8)$$

Пары многочленов  $(P_n, Q_n)$ ,  $Q_n \neq 0$ ,  $\deg Q_n \leq n$ ,  $\deg P_n \leq n-1$ , удовлетворяющие (3.8), называются *n-ыми парами Паде* функции  $\hat{\mu}(z)$  (ряда Лорана функции  $\hat{\mu}(z)$  в окрестности бесконечно удаленной точки). Пары Паде решают задачу об аппроксимации аналитической в окрестности бесконечно удаленной точки функции  $f(z)$  рациональной функцией  $\pi_n(z) = \frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$  степени<sup>6</sup>  $n$ ,  $n \in \mathbf{Z}_+$ . Такую функцию называют *n-ой диагональной аппроксимацией Паде* функции  $f(z)$ . Введение такой функции корректно, т.к. для любой пары Паде отношения  $P_n/Q_n$  определяют одну и ту же рациональную функцию. Действительно, пусть  $(P'_n, Q'_n)$ ,  $(P''_n, Q''_n)$  - *n-ые пары Паде*. Тогда

$$Q'_n(z)f(z) - P'_n(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right),$$

$$Q''_n(z)f(z) - P''_n(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right),$$

откуда  $Q'_n P''_n - Q''_n P'_n = O\left(\frac{1}{z}\right)$ . В левой части этого равенства стоит многочлен, следовательно,  $Q'_n P''_n - Q''_n P'_n = 0$ , т.е.  $P'_n/Q'_n = P''_n/Q''_n$ .

---

<sup>6</sup>Рациональную функцию можно представить в виде  $\pi(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ , где  $P, Q$  - взаимно простые многочлены,  $Q \neq 0$ . Тогда степень рациональной функции определяется как  $\deg \pi(z) = \max\{\deg P, \deg Q\}$ .

Убедимся, что при аппроксимации марковской функции меры  $\mu$   $n$ -ые пары Паде будут состоять из многочленов второго рода  $P_n(z)$  и ортогональных многочленов  $Q_n(z)$ . Для этого определим коэффициенты многочлена

$$Q_n(z) = a_0 + a_1 z_1 + \dots + a_n z^n$$

из уравнения (3.8). Они удовлетворяют следующей линейной системе уравнений:

$$\begin{cases} a_0 s_0 + \dots + a_{n-1} s_{n-1} + a_n s_n = 0 \\ a_0 s_1 + \dots + a_{n-1} s_n + a_n s_{n+1} = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_0 s_{n-1} + \dots + a_{n-1} s_{2n-2} + a_n s_{2n-1} = 0, \end{cases}$$

где  $s_n, n = 0, 1, 2, \dots$ , - коэффициенты разложения марковской функции  $\hat{\mu}(z)$  в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки (они же являются степенными моментами меры  $\mu$ ). Эту систему можно переписать в виде

$$\sum_{j=0}^n s_{i+j} a_j = \int_{-\infty}^{+\infty} Q_n(x) x^i \mu(dx) = 0, \quad i = 0, \dots, n-1.$$

Следовательно знаменатель  $n$ -ой пары Паде  $Q_n(z)$  удовлетворяет соотношениям ортогональности (3.2) с произвольной нормировкой, т.е. является ортогональным относительно меры  $\mu$ .

Проверим, что числитель  $n$ -ой пары Паде  $P_n(z)$  является многочленом второго рода для  $Q_n(z)$ . Имеем

$$\begin{aligned} P_n(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sum_{i=0}^n a_i z^i}{z} \frac{\sum_{i=0}^n a_i x^i}{x} \mu(dx) = \sum_{i=0}^n a_i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^i}{z} \frac{x^i}{x} \mu(dx) = \\ &= \sum_{i=0}^n a_i \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{i-1} (z^j x^{i-1-j}) \mu(dx) = \sum_{i=0}^n a_i \sum_{j=0}^{i-1} z^j s_{i-1-j} = \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} z^j \left( \sum_{i=j+1}^n a_i s_{i-1-j} \right) = \sum_{j=0}^{n-1} b_j z^j. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $P_n(z) = Q_n(z) \hat{\mu}(z) + O(\frac{1}{z})$ . Действительно, выпишем коэффициенты при всех степенях такого многочлена:

$$\begin{aligned} z^0 : & a_1 s_0 + a_2 s_1 + \dots + a_n s_{n-1} = b_0, \\ z^1 : & a_2 s_0 + a_3 s_1 + \dots + a_n s_{n-2} = b_1, \\ & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ z^{n-1} : & a_n s_0 = b_{n-1}. \end{aligned}$$



Таким образом, полиномиальной частью ряда  $Q_n(z)\hat{\mu}(z)$  является многочлен второго рода  $P_n(z)$ .

Если мера  $\mu$  имеет конечное число точек роста  $J$ , то ее марковская функция является рациональной и тождественно равна  $J$ -ой диагональной аппроксимации Паде  $\pi_J(z)$ . Как было замечено в начале этого раздела, в формуле (2.5) для точного решения цепочки Ленгмюра правая часть является марковской функцией меры (3.1) с числом точек роста  $N + 1$ . Поэтому справа в этой формуле стоит  $(N + 1)$ -ая диагональная аппроксимация Паде:

$$\hat{\mu}(z) = \pi_{N+1}(z) = \frac{P_{N+1}(z)}{Q_{N+1}(z)},$$

где знаменатель Паде  $Q_{N+1}$  - ортогональный многочлен относительно меры (3.1), числитель Паде  $P_{N+1}$  - многочлен второго рода для  $Q_{N+1}$ . Все нули знаменателя Паде  $Q_{N+1}$  простые (см. предложение ??). Следовательно, рациональная функция  $\pi_{N+1} = P_{N+1}/Q_{N+1}$  имеет следующее разложение на простейшие дроби

$$\pi_{N+1}(z) = \sum_{k=0}^N \frac{m_k}{z - \lambda_k}.$$

Пусть  $\lambda_k, k = 0 \dots, N$ , - нули многочлена  $Q_{N+1}(z)$ , занумерованные в порядке убывания, тогда  $m_k$  - вычеты:

$$m_k = \operatorname{res}_{z=\lambda_k} \pi_{N+1}(z) = \frac{P_n(\lambda_k)}{Q'_n(\lambda_k)}, \quad k = 0, \dots, N.$$

Их называют *коэффициентами Кристоффеля*.

Введем для ортогональных многочленов первого и второго рода другую нормировку, а именно положим

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_n &= h_0 \dots h_{n-1} Q_n, \quad n \in \mathbf{N}, \quad \tilde{Q}_0 = Q_0, \\ \tilde{P}_n &= h_0 \dots h_{n-1} P_n, \quad n \in \mathbf{N}, \quad \tilde{P}_0 = P_0. \end{aligned}$$

Тогда старший коэффициент ортогонального многочлена  $\tilde{Q}_n$  равен единице. Подставляя равенства для новых многочленов в (3.5)-(3.6), приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{n+1}(z) &= (z - v_n)\tilde{Q}_n(z) - h_n^2 \tilde{Q}_{n-1}(z), \\ \tilde{P}_{n+1}(z) &= (z - v_n)\tilde{P}_n(z) - h_n^2 \tilde{P}_{n-1}(z), \end{aligned} \tag{3.9}$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned}\tilde{P}_0(z) &= 0, & \tilde{P}_1(z) &= 1, \\ \tilde{Q}_0(z) &= 1, & \tilde{Q}_1(z) &= z - v_0.\end{aligned}\tag{3.10}$$

**Предложение 7.** Рациональная функция  $\pi_n = \tilde{P}_n/\tilde{Q}_n = P_n/Q_n$  допускает представление в виде непрерывной дроби

$$\pi_n = \frac{1}{z - v_0 \frac{h_0^2}{z - v_1 \frac{h_1^2}{z - v_2 \dots \frac{h_{n-2}^2}{z - v_{n-1}}}}}\tag{3.11}$$

*Доказательство.* Доказывать будем индукцией по  $n$ . При  $n = 2$  получаем  $\tilde{P}_2(z) = z - v_1$ ,  $\tilde{Q}_2(z) = (z - v_1)(z - v_0) - h_0^2$ . Тогда

$$\frac{1}{z - v_0 \frac{h_0^2}{z - v_1}} = \frac{\tilde{P}_2(z)}{\tilde{Q}_2(z)} = \pi_2.$$

Пусть предположение индукции выполнено для всех номеров от 2 до  $n$ . Покажем, что оно выполнено и для номера  $n+1$ . Мы можем переписать цепную дробь  $(n+1)$ -ого порядка как цепную дробь  $n$ -ого порядка с поправленным последним элементом  $v_{n-2} = v_{n-1} - \frac{h_{n-1}^2}{z - v_n}$ . В соответствии с предположением индукции и рекуррентными формулами (??), (??) сворачивание такой поправленной цепной дроби в рациональную функцию даст следующие соотношения в числителе и знаменателе

$$(z - v_{n-1} - \frac{h_{n-1}^2}{z - v_n})\tilde{P}_{n-1} - h_{n-2}^2\tilde{P}_{n-2} = \tilde{P}_n - \frac{h_{n-1}^2}{z - v_n}\tilde{P}_{n-1} = \frac{\tilde{P}_{n+1}}{z - v_n},$$

$$(z - v_{n-1} - \frac{h_{n-1}^2}{z - v_n})\tilde{Q}_{n-1} - h_{n-2}^2\tilde{Q}_{n-2} = \tilde{Q}_n - \frac{h_{n-1}^2}{z - v_n}\tilde{Q}_{n-1} = \frac{\tilde{Q}_{n+1}}{z - v_n}.$$

Формула (3.11) доказана.

Сопоставляя (3.11) с (2.5), имеем  $v_0 = \dots = v_N = 0$ ,  $h_0^2 = c_1, \dots, h_{N-1}^2 = c_N$ .

**Предложение 8.** *Справедливы следующие утверждения:*

1. Числа  $\lambda_0, \dots, \lambda_N$  из (2.5) являются простыми и действительными, собственными числами матрицы Якоби

$$L(t) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{c_1(t)} & & & \\ \sqrt{c_1(t)} & 0 & \sqrt{c_2(t)} & & \\ & \sqrt{c_2(t)} & 0 & & \\ \mathbf{0} & & \ddots & 0 & \sqrt{c_N(t)} \\ & & & \sqrt{c_N(t)} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

и имеют вид

$$\begin{aligned} & \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\frac{N}{2}}, 0, \lambda_{\frac{N}{2}}, \dots, \lambda_2, \lambda_1, \quad \text{если } N \text{ четное,} \\ & \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\frac{N+1}{2}}, \lambda_{\frac{N+1}{2}}, \dots, \lambda_2, \lambda_1, \quad \text{если } N \text{ нечетное.} \end{aligned}$$

2. если в (2.5)  $m_i$  соответствует  $\lambda$ ,  $m_j$  соответствует  $\lambda$ , то

$$m_i = m_j.$$

*Доказательство.* 1. Числа  $\lambda_0, \dots, \lambda_N$  по теореме 4 являются корнями ортогонального многочлена  $\tilde{Q}_{N+1}(z)$ , стоящего в знаменателе конечной непрерывной дроби в левой части (2.5). Характеристический многочлен матрицы Якоби  $L(t)$  является многочленом  $(N+1)$ -ого порядка  $X_{N+1}(\lambda)$ , и все его собственные значения можно вычислить, раскладывая соответствующий определитель по последней строке, по следующим рекуррентным формулам

$$X_{n+1}(\lambda) = \lambda X_n(\lambda) - c_n X_{n-1}(\lambda), \quad n = 1, \dots, N, \quad (3.13)$$

с начальными условиями  $X_0 = 1$ ,  $X_1 = \lambda$ . Эти соотношения совпадают с (3.9), (3.10) для ортогональных многочленов когда  $v_n = 0$ . Поэтому  $X_{N+1}(\lambda)$  является ортогональным многочленом  $\tilde{Q}_{N+1}(\lambda)$ , а все нули ортогональных многочленов действительные и простые.

Кроме того, из рекуррентной формулы (3.13) с начальными условиями  $X_0 = 1$ ,  $X_1 = \lambda$  для  $n$  четных получим, что многочлены  $X_n$ , состоят только из четных степеней  $\lambda$ , а для нечетных  $n$  многочлены  $X_n$  состоят из нечетных степеней  $\lambda$ . Таким образом, при  $N$  нечетном характеристический многочлен имеет вид  $X_{N+1}(\lambda) = A(\lambda^2)$ . При  $N$

четном характеристический многочлен имеет вид  $X_{N+1}(\lambda) = \lambda B(\lambda^2)$ . Отсюда следует справедливость утверждения 1).

2. Найдем вычеты в точках  $\lambda$  и  $-\lambda$  в правой и левой частях (2.5).

Справа вычеты будут равны соответственно  $\frac{m_i e^{\lambda^2 t}}{\sum_{n=0}^N m_n e^{\lambda_n^2 t}}$  и  $\frac{m_j e^{\lambda^2 t}}{\sum_{n=0}^N m_n e^{\lambda_n^2 t}}$ .

Далее, из рекуррентных формул (3.9) (3.10) и  $v_n = 0$  при четном  $N$  непрерывная дробь слева имеет вид  $\frac{A_1(z^2)}{z(z^2 - \lambda^2)A_2(z^2)}$ . Поэтому вычеты

при  $z = \pm\lambda$  имеют вид  $\frac{A_1(\lambda^2)}{2\lambda^2 A_2(\lambda^2)}$ , т.е. равны между собой. При нечетном  $N$  непрерывная дробь имеет вид  $\frac{z B_1(z^2)}{(z^2 - \lambda^2) B_2(z^2)}$ , поэтому вычеты

при  $z = \pm\lambda$  имеют вид  $\frac{B_1(\lambda^2)}{2B_2(\lambda^2)}$ , и совпадают. Предложение доказано.

### 3.2 Аттрактор цепочки Ленгмюра

К сожалению, соотношение (2.5) не позволяет найти асимптотику решений цепочки Ленгмюра. Действительно, учитывая результаты предложения 8 о том, как устроены  $\lambda_k, m_k, k = 0, \dots, N$ , в правой части этого соотношения имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \frac{1}{(z - \lambda_k)} \cdot \frac{m_k e^{\lambda_k^2 t}}{\sum_{i=0}^N m_i e^{\lambda_i^2 t}} = \frac{1}{2(z - \lambda_{max})} + \frac{1}{2(z + \lambda_{max})} = \frac{z}{z^2 - \lambda_{max}^2} = \frac{1}{z - \frac{\lambda_{max}^2}{z}}$$

Сравнивая полученное выражение с левой частью (2.5), заключаем, что  $\lim_{t \rightarrow \infty} c_2(t) = 0$ . Поэтому в пределе при  $t \rightarrow \infty$  непрерывная дробь обрывается, и мы не можем определить асимптотику из формулы для точного решения цепочки Ленгмюра.

Поскольку информация о динамике "данных рассеяния"  $\{\lambda_n, \hat{m}_n(t) | n = 0, 1, \dots, N\}$  не позволяет непосредственно вычислить асимптотику переменных цепочки Ленгмюра  $\{c_n(t), n = 1, \dots, N\}$ , которые определяют матрицу Якоби, нам потребуется третья система переменных  $s_n(t)$ , которые являются степенными моментами меры, построенной по данным рассеяния.

В соответствии с предложением 8 обозначим через  $n$  число различных по модулю собственных значений матрицы Якоби  $L(t)$ . Тогда

$n = \lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1$ , где  $\lfloor \frac{N}{2} \rfloor$  - целая часть числа  $\frac{N}{2}$ . Упорядочим  $\lambda_1^2 > \lambda_2^2 > \dots > \lambda_n^2$  и заметим, что при четных  $N$   $\lambda_n = 0$ .

**Лемма 1.** Пусть

$$H_0(t) \equiv 1,$$

$$H_r(t) = \begin{vmatrix} s_0(t) & s_1(t) & \dots & s_{r-1}(t) \\ s_1(t) & s_2(t) & \dots & s_r(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{r-1}(t) & s_r(t) & \dots & s_{2r-2}(t) \end{vmatrix}, r = 1, 2, \dots$$

- определители Ганкеля, построенные по последовательности степенных моментов  $\{s_r(t)\}_{r=0}^\infty$  меры

$$\mu(dx, t) = \sum_{i=0}^N \frac{m_i e^{\lambda_i^2 t}}{\sum_{i=0}^N m_i e^{\lambda_i^2 t}} \delta(x - \lambda_i).$$

Положим  $\nu = \min\{\lambda_k^2 - \lambda_{k+1}^2 | k=1, \dots, n-1\} > 0$ . Тогда

$$\frac{H_{2k+1}(t)}{H_{2k}(t)} = O(e^{(\lambda_{k+1}^2 - \lambda_1^2)t}), \quad k = 0, \dots, n-1,$$

$$\frac{H_{2k}(t)}{H_{2k-1}(t)} = O(e^{(\lambda_k^2 - \lambda_1^2)t}), \quad k = 1, \dots, n,$$

$$\frac{H_{2k+2}(t)}{H_{2k+1}(t)} = (\lambda_{k+1}^2 + O(e^{-\nu t})) \frac{H_{2k+1}(t)}{H_{2k}(t)}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

*Доказательство.* В силу предложения 7 число различных коэффициентов Кристоффеля, построенных по мере  $\mu(dx, t)$ , равно  $n$ . Обозначим их через

$$\begin{cases} \{m_1, \dots, m_{n-1}, m_n\}, & \text{если } N \text{ нечетное;} \\ \{m_1, \dots, m_{n-1}, \tilde{m}_n\}, & \text{если } N \text{ четное.} \end{cases}$$

Положим  $p(t) = \sum_{i=1}^n m_i e^{\lambda_i^2 t}$ , где  $m_n = \frac{1}{2} \tilde{m}_n$  при четных  $N$ . Тогда

$$\mu(dx, t) = \frac{1}{2p(t)} \left\{ \sum_{k=1}^n m_k (\delta(x - \lambda_k) + \delta(x + \lambda_k)) \right\} \text{ при нечетных } N,$$

$$\mu(dx, t) = \frac{1}{2p(t)} \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} m_k (\delta(x - \lambda_k) + \delta(x + \lambda_k)) + \tilde{m}_n \delta(x) \right\} \text{ при четных } N.$$

Последовательность степенных моментов  $\{s_r(t)\}_{r=0}^\infty$ , построенная по мере  $\mu(dx, t)$ , имеет вид

$$s_r(t) \equiv 0 \quad \text{при нечетных } r,$$

$$s_r(t) = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \lambda_i^r e^{\lambda_i^2 t}}{\sum_{i=1}^n m_i e^{\lambda_i^2 t}} \quad \text{при четных } r.$$

Учитывая то, что все нечетные моменты  $s_r(t) \equiv 0, r = 1, 3, 5, \dots$ , имеем:

$$H_{2k+1}(t) = \begin{vmatrix} s_0(t) & 0 & s_2(t) & \dots & 0 & s_{2k}(t) \\ 0 & s_2(t) & 0 & \dots & s_{2k}(t) & 0 \\ s_2(t) & 0 & s_4(t) & \dots & 0 & s_{2k+2}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & s_{2k}(t) & 0 & \dots & s_{4k-2}(t) & 0 \\ s_{2k}(t) & 0 & s_{2k+2}(t) & \dots & 0 & s_{4k}(t) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{p^{2k+1}(t)} \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_{2k+1}=1}^n m_{i_1} m_{i_2} \dots m_{i_{2k+1}} e^{(\lambda_{i_1}^2 + \lambda_{i_2}^2 + \dots + \lambda_{i_{2k+1}}^2)t} \times$$

$$\times \lambda_{i_2}^2 \lambda_{i_3}^2 (\lambda_{i_4}^2 \lambda_{i_5}^2)^2 \dots (\lambda_{i_{2k}}^2 \lambda_{i_{2k+1}}^2)^k \begin{vmatrix} 1 & 0 & \lambda_{i_1}^2 & \dots & 0 & \lambda_{i_1}^{2k} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \lambda_{i_2}^{2k-2} & 0 \\ 1 & 0 & \lambda_{i_3}^2 & \dots & 0 & \lambda_{i_3}^{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \lambda_{i_{2k}}^{2k-2} & 0 \\ 1 & 0 & \lambda_{i_{2k+1}}^2 & \dots & 0 & \lambda_{i_{2k+1}}^{2k} \end{vmatrix}.$$

Обозначим последний определитель  $\bar{W}_{2k+1}$ . Заметим, что одинаковым количеством перестановок строк и столбцов определитель  $\bar{W}_{2k+1}$  при-

ВОДИТСЯ К ТАКОМУ ВИДУ:

$$\left| \begin{array}{cccc|cccc} 1 & \lambda_{i_1}^2 & \dots & \lambda_{i_1}^{2k} & & & & \\ 1 & \lambda_{i_3}^2 & \dots & \lambda_{i_3}^{2k} & & & O & \\ & & \dots & & & & & \\ 1 & \lambda_{i_{2k+1}}^2 & \dots & \lambda_{i_{2k+1}}^{2k} & & & & \\ & & & & 1 & \lambda_{i_2}^2 & \dots & \lambda_{i_2}^{2k} & 2 \\ & & & & 1 & \lambda_{i_4}^2 & \dots & \lambda_{i_4}^{2k} & 2 \\ & O & & & & & \dots & & \\ & & & & 1 & \lambda_{i_{2k}}^2 & \dots & \lambda_{i_{2k}}^{2k} & 2 \end{array} \right| ,$$

т.е. распадается на два определителя Вандермонда относительно  $\lambda_{i_t}^2$ :

$$\bar{W}_{2k+1}(\lambda_{i_1}^2, \dots, \lambda_{i_{2k+1}}^2) = W_{k+1}(\lambda_{i_1}^2, \lambda_{i_3}^2, \dots, \lambda_{i_{2k+1}}^2) W_k(\lambda_{i_2}^2, \lambda_{i_4}^2, \dots, \lambda_{i_{2k}}^2). \quad (3.14)$$

Определитель  $\bar{W}_{2k+1}$  обращается в 0, если равен нулю хотя бы один из определителей Вандермонда, стоящих справа, т.е. когда совпадают любые два четных, либо два нечетных индекса. Зафиксируем два подмножества множества  $\{1, 2, \dots, n\}$ :  $I_1 = \{j_1, j_2, \dots, j_{k+1}\}$ ,  $j_1 < j_2 < \dots < j_{k+1}$ , и  $I_2 = \{l_1, l_2, \dots, l_k\}$ ,  $l_1 < l_2 < \dots < l_k$ , каждое из которых состоит соответственно из  $k+1$  и  $k$  различных элементов, занумерованных в порядке возрастания, и распишем

$$\begin{aligned} & \lambda_{i_2}^2 \lambda_{i_3}^2 (\lambda_{i_4}^2 \lambda_{i_5}^2)^2 \dots (\lambda_{i_{2k}}^2 \lambda_{i_{2k+1}}^2)^k = \\ & = (\lambda_{i_1}^0 \lambda_{i_3}^2 \lambda_{i_5}^4 \dots \lambda_{i_{2k+1}}^{2k}) (\lambda_{i_2}^0 \lambda_{i_4}^2 \dots \lambda_{i_{2k}}^{2k-2}) \lambda_{i_2}^2 \lambda_{i_4}^2 \dots \lambda_{i_{2k}}^2. \end{aligned}$$

Заметим, что, если считать набор  $(i_1, i_3, \dots, i_{2k+1})$ , соответственно набор  $(i_2, i_4, \dots, i_{2k})$ , перестановкой множества  $I_1$ , соответственно  $I_2$ , то первая скобка в полученном выражении совпадает по абсолютному значению со слагаемым из выражения для определителя Вандермонда  $W(\lambda_{j_1}^2, \lambda_{j_2}^2, \dots, \lambda_{j_{k+1}}^2)$ , соответственно  $W(\lambda_{l_1}^2, \lambda_{l_2}^2, \dots, \lambda_{l_k}^2)$ . Тогда

$$\begin{aligned} & \sum_{(i_1, i_3, \dots, i_{2k+1}) \in I_1} \lambda_{i_1}^0 \lambda_{i_3}^2 \lambda_{i_5}^4 \dots \lambda_{i_{2k+1}}^{2k} W_{k+1}(\lambda_{i_1}^2, \lambda_{i_3}^2, \dots, \lambda_{i_{2k+1}}^2) = \\ & = W_{k+1}(\lambda_{j_1}^2, \lambda_{j_2}^2, \dots, \lambda_{j_{k+1}}^2) \sum_{(i_1, i_3, \dots, i_{2k+1}) \in I_1} (1)^{\sigma(i_1, i_3, \dots, i_{2k+1})} \lambda_{i_1}^0 \lambda_{i_3}^2 \lambda_{i_5}^4 \dots \lambda_{i_{2k+1}}^{2k}. \end{aligned}$$

Здесь суммирование ведется по всевозможным перестановкам множества  $I_1$ ,  $\sigma$  - четность перестановки. Тогда сумма в последнем выражении в точности равна определителю  $W_{k+1}(\lambda_{j_1}^2, \lambda_{j_2}^2, \dots, \lambda_{j_{k+1}}^2)$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} \sum_{(i_1, i_3, \dots, i_{2k+1}) \in I_1} \lambda_{i_1}^0 \lambda_{i_3}^2 \lambda_{i_5}^4 \dots \lambda_{i_{2k+1}}^{2k} W_{k+1}(\lambda_{i_1}^2, \lambda_{i_3}^2, \dots, \lambda_{i_{2k+1}}^2) = \\ = W_{k+1}^2(\lambda_{j_1}^2, \lambda_{j_2}^2, \dots, \lambda_{j_{k+1}}^2). \end{aligned}$$

Аналогично для четных индексов

$$\begin{aligned} \sum_{(i_2, i_4, \dots, i_{2k}) \in I_2} \lambda_{i_2}^0 \lambda_{i_4}^2 \lambda_{i_6}^4 \dots \lambda_{i_{2k}}^{2k} {}^2W_k(\lambda_{i_2}^2, \lambda_{i_4}^2, \dots, \lambda_{i_{2k}}^2) = \\ = W_k^2(\lambda_{l_1}^2, \lambda_{l_2}^2, \dots, \lambda_{l_k}^2). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} H_{2k+1}(t) = \frac{1}{p^{2k+1}(t)} \sum_{\substack{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{k+1} \leq n \\ 1 \leq l_1 < l_2 < \dots < l_k \leq n}} m_{j_1} \dots m_{j_{k+1}} m_{l_1} \dots m_{l_k} \lambda_{l_1}^2 \lambda_{l_2}^2 \dots \lambda_{l_k}^2 \times \\ \times W_{k+1}^2(\lambda_{j_1}^2, \dots, \lambda_{j_{k+1}}^2) W_k^2(\lambda_{l_1}^2, \dots, \lambda_{l_k}^2) e^{t(\lambda_{j_1}^2 + \dots + \lambda_{j_{k+1}}^2 + \lambda_{l_1}^2 + \dots + \lambda_{l_k}^2)}. \quad (3.15) \end{aligned}$$

Аналогичные выкладки и рассуждения справедливы для  $H_{2k+2}(t)$ .

$$\begin{aligned} H_{2k+2}(t) = \frac{1}{p^{2k+2}(t)} \sum_{\substack{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{k+1} \leq n \\ 1 \leq l_1 < l_2 < \dots < l_{k+1} \leq n}} m_{j_1} \dots m_{j_{k+1}} m_{l_1} \dots m_{l_{k+1}} \lambda_{l_1}^2 \lambda_{l_2}^2 \dots \lambda_{l_{k+1}}^2 \times \\ \times W_{k+1}^2(\lambda_{j_1}^2, \dots, \lambda_{j_{k+1}}^2) W_{k+1}^2(\lambda_{l_1}^2, \dots, \lambda_{l_{k+1}}^2) e^{t(\lambda_{j_1}^2 + \dots + \lambda_{j_{k+1}}^2 + \lambda_{l_1}^2 + \dots + \lambda_{l_{k+1}}^2)}. \quad (3.16) \end{aligned}$$

Приведем подобные в сумме (3.15) и в получившемся выражении обозначим через  $CT_{H_{2k+1}}$  слагаемое, которое быстрее всех растет по времени, соответственно через  $CT_{H_{2k+2}}$  слагаемое с максимальным ростом по времени из суммы (3.16) после приведения подобных. Учитывая то, что все  $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ , упорядочены по возрастанию, а скорость



роста по времени каждого слагаемого определяется показателем экспоненты, входящей в него, получим

$$CT_{H_{2k+1}}(t) = m_1^2 m_2^2 \dots m_k^2 m_{k+1} W_{k+1}^2(\lambda_1^2, \dots, \lambda_{k+1}^2) W_k^2(\lambda_1^2, \dots, \lambda_k^2) \times \\ \times \lambda_1^2 \dots \lambda_k^2 e^{[2(\lambda_1^2 + \dots + \lambda_k^2) + \lambda_{k+1}^2]t} \quad (3.17)$$

$$CT_{H_{2k+2}}(t) = m_1^2 m_2^2 \dots m_{k+1}^2 W_{k+1}^4(\lambda_1^2, \dots, \lambda_{k+1}^2) \lambda_1^2 \dots \lambda_{k+1}^2 e^{2(\lambda_1^2 + \dots + \lambda_{k+1}^2)t} \quad (3.18)$$

Тогда справедливо следующее соотношение

$$\frac{H_{2k+2}}{H_{2k+1}} = \frac{1}{p(t)} \cdot \frac{CT_{H_{2k+2}}(t)}{CT_{H_{2k+1}}(t)} \cdot \frac{1 + \sum_i k_i e^{-\nu_i t}}{1 + \sum_j \hat{k}_j e^{-\hat{\nu}_j t}},$$

где  $\nu_i, \hat{\nu}_j, k_i, \hat{k}_j$  - некоторые константы,  $\nu_i \geq \nu > 0$ ,  $\hat{\nu}_j \geq \nu > 0$ ,  $\nu$  определено в условии леммы. Поскольку  $p(t) = \sum_{i=1}^n m_i e^{\lambda_i^2 t}$ , имеем

$$\frac{H_{2k+2}}{H_{2k+1}} = \frac{1}{p(t)} \cdot \frac{m_{k+1} \lambda_{k+1}^2 W_{k+1}^2(\lambda_1^2, \dots, \lambda_{k+1}^2) e^{\lambda_{k+1}^2 t}}{W_k^2(\lambda_1^2, \dots, \lambda_k^2)} \cdot (1 + O(e^{-\nu t})),$$

$$\frac{H_{2k+2}}{H_{2k+1}} = \frac{m_{k+1} \lambda_{k+1}^2 W_{k+1}^2(\lambda_1^2, \dots, \lambda_{k+1}^2) e^{\lambda_{k+1}^2 t}}{m_1 W_k^2(\lambda_1^2, \dots, \lambda_k^2) e^{\lambda_1^2 t}} \cdot (1 + O(e^{-\nu t})) = O\left(e^{(\lambda_{k+1}^2 - \lambda_1^2)t}\right).$$

Аналогично

$$CT_{H_{2k}}(t) = m_1^2 m_2^2 \dots m_k^2 W_k^4(\lambda_1^2, \dots, \lambda_k^2) \lambda_1^2 \dots \lambda_k^2 e^{2(\lambda_1^2 + \dots + \lambda_k^2)t}, \quad (3.19)$$

$$\frac{H_{2k+1}}{H_{2k}} = \frac{1}{p(t)} \cdot \frac{CT_{H_{2k+1}}(t)}{CT_{H_{2k}}(t)} \cdot (1 + O(e^{-\nu t})) = \quad (3.20)$$

$$= \frac{m_{k+1} W_{k+1}^2(\lambda_1^2, \dots, \lambda_{k+1}^2) e^{\lambda_{k+1}^2 t}}{m_1 W_k^2(\lambda_1^2, \dots, \lambda_k^2) e^{\lambda_1^2 t}} \cdot (1 + O(e^{-\nu t})) = O\left(e^{(\lambda_{k+1}^2 - \lambda_1^2)t}\right).$$

Нам осталось доказать третье соотношение леммы. Заметим, что в силу (3.17), (3.18), (3.19), (3.20),

$$\frac{CT_{H_{2k+2}}(t)}{CT_{H_{2k+1}}(t)} = \lambda_{k+1}^2 \cdot \frac{CT_{H_{2k+1}}(t)}{CT_{H_{2k}}(t)}, \quad \frac{1}{p(t)} \cdot \frac{CT_{H_{2k+1}}(t)}{CT_{H_{2k}}(t)} = \frac{H_{2k+1}}{H_{2k}} \cdot (1 + O(e^{-\nu t})),$$

поэтому, проделав соответствующие выкладки, мы получаем

$$\frac{H_{2k+2}}{H_{2k+1}} = \frac{1}{p(t)} \cdot \lambda_{k+1}^2 \cdot \frac{CT_{H_{2k+1}}(t)}{CT_{H_{2k}}(t)} (1 + O(e^{-\nu t})) = \lambda_{k+1}^2 \frac{H_{2k+1}}{H_{2k}} (1 + O(e^{-\nu t})).$$

Лемма 1 полностью доказана.

**Теорема 5.** *Решение задачи Коши (2.4) для конечной цепочки Ленгмюра сходится при  $t \rightarrow \infty$  к неподвижной точке, зависящей от начальных условий. Более того, характер сходимости определяется следующими соотношениями*

$$c_{2k-1}(t) = \lambda_k^2 + O(e^{-\nu t}), \quad k = 1, \dots, \left[\frac{N+1}{2}\right],$$

$$c_{2k}(t) = O(e^{(\lambda_{k+1}^2 - \lambda_k^2)t}), \quad k = 1, \dots, \left[\frac{N}{2}\right],$$

где  $\nu = \min\{\lambda_k^2 - \lambda_{k+1}^2 | k = 1, \dots, \left[\frac{N}{2}\right]\} > 0$ ,  $\lambda_1^2 > \lambda_2^2 > \dots > \lambda_{\left[\frac{N}{2}\right]+1}^2$  – квадраты всех различных по модулю собственных значений матрицы Якоби  $L(t)$ .

*Доказательство.* Имеем

$$c_r(t) = \frac{H_{r-1}(t)H_{r+1}(t)}{H_r^2(t)}.$$

Тогда по лемме 1

$$\begin{aligned} c_{2k}(t) &= O(e^{(\lambda_{k+1}^2 - \lambda_k^2 - \lambda_1^2 + \lambda_k^2 + \lambda_1^2)t}) = O(e^{(\lambda_{k+1}^2 - \lambda_k^2)t}), \\ c_{2k-1}(t) &= \frac{H_{2k-2}(t)}{H_{2k-1}(t)} \cdot \lambda_k^2 \frac{H_{2k-1}(t)}{H_{2k-2}(t)} (1 + O(e^{-\nu t})) = \lambda_k^2 + O(e^{-\nu t}). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Если ограничиться вычислением аттрактора цепочки Ленгмюра без оценки скорости сходимости, то можно обосновать алгоритм его нахождения, не апеллируя к теории ортогональных многочленов и рациональных аппроксимаций. Мы приведем доказательство, которое следует схеме, предложенной Ю.Мозером в [12].

**Лемма 2.** *Справедливы соотношения*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c_{2k}(t) = 0, \quad k = 1, \dots, \left[\frac{N}{2}\right]. \quad (3.21)$$

*Доказательство.* Как было показано в предложении 2, все  $c_k(t)$ ,  $k = 1, \dots, N$ , положительны и ограничены, поэтому  $n$ -ое уравнение цепочки Ленгмюра можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt} \ln c_n = c_{n+1} - c_{n-1}. \quad (3.22)$$

Отсюда

$$\frac{d}{dt} \ln(c_1 c_3 \dots c_{2k-1}) = c_2 + c_4 - c_2 + c_6 - c_4 + \dots + c_{2k-2} - c_{2k-4} + c_{2k} - c_{2k-2} = c_{2k}.$$

Покажем, что сходится интеграл

$$\int_0^{+\infty} c_{2k}(t) dt. \quad (3.23)$$

Действительно, из неотрицательности  $c_{2k}(t)$  следует ограниченность рассматриваемого интеграла снизу. Из неотрицательности и ограниченности  $c_k(t)$ ,  $k = 1, \dots, N$ , следует, что функция

$$C_{2k}(T) = \int_0^T c_{2k}(t) dt = \ln(c_1(T) c_3(T) \dots c_{2k-1}(T)) - \ln(c_1(0) c_3(0) \dots c_{2k-1}(0))$$

является ограниченной сверху и монотонно возрастающей, а, значит, рассматриваемый интеграл сходится.

Из сходимости интеграла (3.23) следуют соотношения (3.21). Допустим противное. Тогда найдутся  $\varepsilon > 0$  и последовательность  $\{t_s\}_{s=1}^{\infty}$ ,  $t_{s+1} - t_s > 1$  такие, что  $c_k(t_s) > \varepsilon$  для всех  $s = 1, 2, \dots$ . В силу системы из ограниченности каждой из переменных следует ограниченность их производных  $|\dot{c}_k(t)| < M$ ,  $k = 1, \dots, N$ . Без ограничения общности можно выбрать  $\frac{1}{2} > \delta = \frac{\varepsilon}{2M} > 0$ . По формуле конечных приращений для всех  $t$  таких, что  $|t - t_s| < \delta$  выполняется неравенство

$$|c_{2k}(t_s) - c_{2k}(t)| \leq M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда  $c_{2k}(t) \geq \frac{\varepsilon}{2}$  для всех  $t$  таких, что  $|t - t_s| < \delta$ . Следовательно,

$$\int_0^{+\infty} c_{2k}(t) dt \geq \sum_{s=2}^{\infty} \int_{t_s}^{t_s+\delta} c_{2k}(t) dt \geq \sum_{s=2}^{\infty} \left( \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{M} \right) = +\infty.$$

Получили противоречие, которое доказывает утверждение леммы.

Обозначим количество переменных системы (2.4) с нечетными индексами через  $r = \lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor$ . Рассмотрим многочлен

$$P(z, t) = (z - c_1(t))(z - c_3(t)) \dots (z - c_{2r-1}(t)) = \sum_{k=0}^r p_k(t) z^k. \quad (3.24)$$

**Лемма 3.** *Существуют пределы*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} p_k(t) = p_k^*, \quad k = 0, \dots, r.$$

*Корни предельного многочлена*

$$P^*(z) = \sum_{k=0}^r p_k^* z^k$$

*совпадают с квадратами различных положительных собственных значений  $\lambda_1^2, \dots, \lambda_r^2$  матрицы Якоби  $L(t)$ .*

*Доказательство.* Так как собственные значения матрицы Якоби  $L(t)$  не зависят от времени, то по формулам Виета коэффициенты характеристического многочлена тоже не зависят от времени. Кроме того, в предложении 8 было показано, что в случае нечетного  $N$  коэффициенты характеристического многочлена матрицы Якоби (3.12) не равны нулю только при четных степенях. Если же  $N$  четно, то ненулевые коэффициенты стоят только при нечетных степенях многочлена. Тогда характеристический многочлен матрицы Якоби (3.12) можно записать в виде

$$\begin{aligned} X_{N+1}(\lambda, t) &= \sum_{k=0}^r d_k \lambda^{2k}, \quad \text{если } N \text{ четно;} \\ X_{N+1}(\lambda, t) &= \sum_{k=0}^r d_k \lambda^{2k+1}, \quad \text{если } N \text{ нечетно.} \end{aligned}$$

С другой стороны, и это видно из рекуррентной формулы (3.13) для подсчета характеристического многочлена матрицы Якоби  $L(t)$ , коэффициенты  $d_k$  этого многочлена представляют собой полиномы от  $c_1(t), c_2(t), \dots, c_N(t)$ . В каждом таком полиноме можно выделить слагаемые, которые зависят только от нечетных переменных. Обозначим их через  $\bar{d}_k(c_1, c_3, \dots, c_{2r-1})$ . Тогда

$$d_k(c_1, c_2, \dots, c_N) = \bar{d}_k(c_1, c_3, \dots, c_{2r-1}) + \tilde{d}_k(c_1, c_2, \dots, c_N).$$

В  $\tilde{d}_k(c_1, c_2, \dots, c_N)$  входят все те слагаемые, которые содержат хотя бы одну переменную с четным индексом. В силу ограниченности  $c_k(t)$ ,  $k = 1, \dots, N$ , и леммы 2 имеем, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{d}_k(c_1(t), c_2(t), \dots, c_N(t)) = 0. \quad (3.25)$$

Заметим, что  $\bar{d}_k(c_1(t), c_3(t), \dots, c_{2r-1}(t))$  можно получить, если формально положить  $\sqrt{c_{2k}(t)} \equiv 0$ ,  $k = 1, \dots, \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ , в матрице Якоби  $L(t)$ . Характеристический многочлен получившейся блочной матрицы при четных  $N$  имеет вид

$$(\lambda^2 - c_1(t))(\lambda^2 - c_3(t)) \dots (\lambda^2 - c_{2r-1}(t)) = \sum_{k=0}^r \bar{d}_k(t) \lambda^{2k}, \quad (3.26)$$

а при нечетных  $N$  имеет вид

$$\lambda(\lambda^2 - c_1(t))(\lambda^2 - c_3(t)) \dots (\lambda^2 - c_{2r-1}(t)) = \sum_{k=0}^r \bar{d}_k(t) \lambda^{2k+1}. \quad (3.27)$$

Сравнивая (3.24) с (3.26) и (3.27), получаем

$$\bar{d}_k(c_1(t), c_3(t), \dots, c_{2r-1}(t)) = p_k(t).$$

Так как коэффициенты  $d_k$  характеристического многочлена  $X_{N+1}(\lambda, t)$  не зависят от времени, то в силу (3.25)

$$d_k = \lim_{t \rightarrow +\infty} \bar{d}_k(c_1(t), c_3(t), \dots, c_N(t)).$$

Отсюда следует, что

$$d_k = \lim_{t \rightarrow +\infty} p_k(t) = p_k^*, \quad (3.28)$$

и первое утверждение леммы доказано.

Равенства (3.28) означают, что коэффициенты предельного многочлена  $P^*(z)$  при  $z^k$ ,  $k = 1, \dots, r$ , совпадают с коэффициентами характеристического многочлена  $X_{N+1}(\lambda, t)$  при  $\lambda^{2k}$  в случае нечетных  $N$ , и при  $\lambda^{2k+1}$  в случае четных  $N$ . Тогда корни предельного многочлена  $P^*(z)$  совпадают с квадратами  $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_r^2$  различных положительных корней характеристического многочлена  $X_{N+1}(\lambda, t)$ , которые не зависят от времени, все простые и вещественные. Лемма доказана.

**Лемма 4.** *Справедливы соотношения*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c_{2k-1}(t) = \lambda_k^2, \quad k = 1, \dots, \left[ \frac{N+1}{2} \right], \quad (3.29)$$

где  $\lambda_1^2 > \dots > \lambda_r^2$  являются квадратами различных положительных собственных значений матрицы Якоби  $L(t)$ .

*Доказательство.* По лемме 3 все корни предельного многочлена  $P^*(z)$  простые. Тогда по теореме о неявной функции найдется такое  $\varepsilon > 0$ , что для всех  $a_k$  таких, что  $|a_k - p_k^*| < \varepsilon, k = 0, \dots, r$ , корни многочлена  $A(z) = \sum_{k=0}^r a_k z^k$  гладко зависят от его коэффициентов. Обозначим корни многочлена  $A(z)$  через  $z_s^0(a_1, \dots, a_r), s = 1, \dots, r$ . Тогда справедливы соотношения

$$\lim_{\substack{a_1 \rightarrow p_1^* \\ \vdots \\ a_r \rightarrow p_r^*}} z_k^0(a_1, \dots, a_r) = \lambda_k^2, \quad k = 1, \dots, r.$$

В лемме 3 получили, что коэффициенты многочлена  $P(z, t)$  из (3.24) имеют предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_k(t) = p_k^*, \quad k = 0, \dots, r.$$

Поэтому, для корней  $c_1(t), c_3(t), \dots, c_{2r-1}(t)$  многочлена  $P(z, t)$  выполняются соотношения

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c_{2k-1}(t) = \lambda_s^2, \quad k, s = 1, \dots, r.$$

К какому именно  $\lambda_s^2$  сходится  $c_{2k-1}(t)$  определяется из системы (2.4). Так как по лемме 2  $c_{2k}(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , а

$$\frac{d \ln c_{2k}(t)}{dt} = c_{2k+1}(t) - c_{2k-1}(t), \quad k = 1, \dots, r,$$

то отсюда следует, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c_{2k+1}(t) < \lim_{t \rightarrow \infty} c_{2k-1}(t).$$

Занумеровав  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_{N+1}$ , окончательно получаем (3.29). Лемма доказана.

Тем не менее, оценка скорости сходимости для аттрактора цепочки Ленгмюра необходима, чтобы доказать устойчивость по Ляпунову,

и, кроме того, представляет интерес для объяснения результатов численного эксперимента.

**Следствие 1.** Пусть  $y_1 > y_2 > \dots > y_k > 0$ . Неподвижные точки конечной цепочки Ленгмюра из множества

$$\begin{aligned} (y_1, 0, y_2, 0, \dots, y_k) & \text{ при нечетных } N = 2k - 1, \\ (y_1, 0, y_2, 0, \dots, y_k, 0) & \text{ при четных } N = 2k \end{aligned} \quad (3.30)$$

являются устойчивыми по Ляпунову.

*Доказательство.* Обозначим  $c_i(t, t_0; \gamma_1, \dots, \gamma_N)$  решение задачи Коши (2.4). Докажем утверждение для нечетных  $N = 2k - 1$ . Зафиксируем некоторую точку  $(y_1, 0, y_2, 0, \dots, y_k)$  из множества (3.30) и момент времени  $T > 0$ . В соответствии с теоремой 5 обозначим  $y_1 = \lambda_1^2, y_2 = \lambda_2^2, \dots, y_k = \lambda_k^2$ . По теореме о непрерывной зависимости решения системы дифференциальных уравнений от начальных данных для любого  $\varepsilon > 0$  и момента времени  $T > 0$  существует число  $\delta(\varepsilon, T) > 0$  такое, что из неравенств

$$\left| \gamma_i - \lambda_{\frac{i+1}{2}}^2 \right| < \delta(\varepsilon, T), \quad i = 1, 3, 5, \dots, N,$$

$$|\gamma_i| < \delta(\varepsilon, T), \quad i = 2, 4, 6, \dots, N - 1$$

следуют неравенства

$$|\bar{c}_i(t) - c_i(t)| < \varepsilon, \quad i = 1, \dots, N, \quad t \in [0, T],$$

где  $\bar{c}_i(t) = c_i(t, t_0; \gamma_1, \dots, \gamma_N)$ ,  $c_i(t) = c_i(t, 0; \lambda_1^2, 0, \dots, \lambda_k^2)$ .

Пусть положительным начальным данным  $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N\}$  задачи Коши (2.4) соответствует набор собственных значений соответствующей матрицы Якоби (3.12)  $\bar{\lambda}_1^2, \bar{\lambda}_2^2, \dots, \bar{\lambda}_k^2$ . Поскольку по теореме о неявной функции простые собственные числа матрицы Якоби гладко зависят от ее элементов, существует  $\delta_0(\varepsilon) > 0$  такое, что при

$$\left| \gamma_i - \lambda_{\frac{i+1}{2}}^2 \right| < \delta_0(\varepsilon), \quad i = 1, 3, 5, \dots, N,$$

$$|\gamma_i| < \delta_0(\varepsilon), \quad i = 2, 4, 6, \dots, N - 1$$

выполняется неравенство

$$|\bar{\lambda}_i^2 - \lambda_i^2| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Согласно теореме 5 существуют такие положительные константы  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $T_1$ , что при  $t > T_1$  справедливы неравенства

$$|\bar{c}_i(t) - c_i(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + K_1 e^{-\bar{\nu}t}, i = 1, 3, \dots, N,$$

$$|\bar{c}_i(t) - c_i(t)| \leq K_2 e^{-\bar{\nu}t}, i = 2, 4, \dots, N - 1,$$

где  $\bar{\nu} = \min\{\bar{\lambda}_s^2 - \bar{\lambda}_{s+1}^2 | s = 1, \dots, k - 1\} > 0$ . В качестве  $T$  выберем наименьшее значение такое, что  $T > T_1$  и выполняется неравенство

$$\max\{K_2 e^{-\bar{\nu}T}, \frac{\varepsilon}{2} + K_1 e^{-\bar{\nu}T}\} < \varepsilon.$$

В качестве  $\delta$  возьмем  $\delta = \min\{\delta(\varepsilon, T), \delta_0(\varepsilon)\}$ . Тогда при таких начальных данных  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_N\}$ , что

$$\left| \gamma_i - \lambda_{\frac{i+1}{2}}^2 \right| < \delta, \quad i = 1, 3, 5, \dots, N,$$

$$|\gamma_i| < \delta, \quad i = 2, 4, 6, \dots, N - 1,$$

для всех  $t > 0$  будут выполняться неравенства

$$|\bar{c}_i(t) - c_i(t)| < \varepsilon, \quad i = 1, \dots, N.$$

Для четных  $N$  рассуждения полностью аналогичные. Следствие доказано.

Теорема 5 и следствие 1 дают исчерпывающее описание аттрактора конечной цепочки Ленгмюра. Решение любой задачи Коши (2.4) с положительными начальными данными сходится к устойчивой по Ляпунову неподвижной точке, которую можно найти, вычислив собственные числа матрицы Якоби, составленной по начальным данным. Эти неподвижные точки образуют  $([\frac{N}{2}] + 1)$ -мерное многообразие (3.30), которое является базой расслоения фазового пространства. Слоями этого расслоения являются множества начальных условий, приводящих к одной и той же предельной точке.

Теорема 5 описывает результат эволюции распределения предприятий по уровням эффективности на временах порядка  $\frac{1}{\beta\nu} \ll t \ll \frac{1}{\alpha}$ . В



этом временном диапазоне устанавливается плотность распределения, у которой число локальных максимумов и их величины определяются по начальным данным. Таким образом, структура аттрактора цепочки Ленгмюра объясняет результаты численных экспериментов из раздела 2.

# Приложение

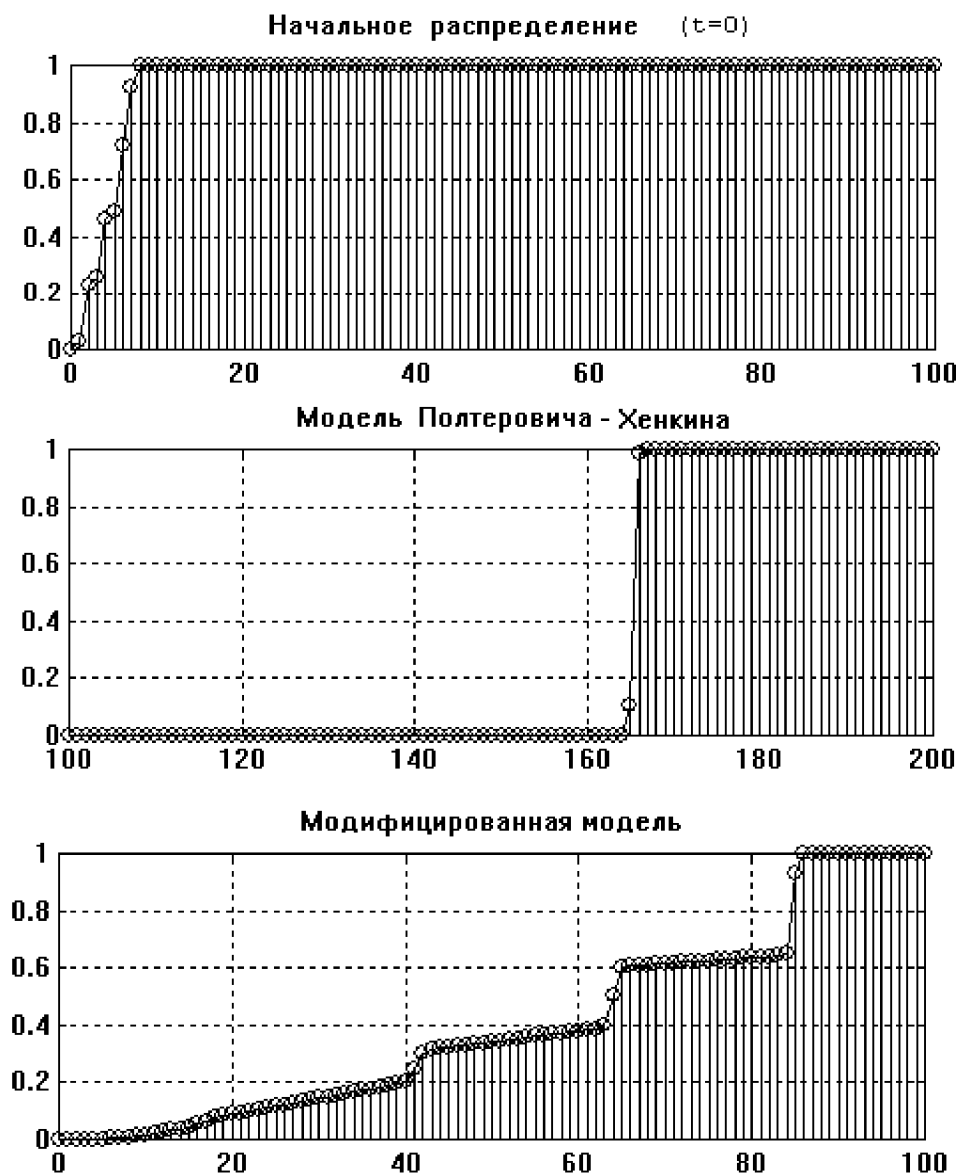


рис. 1  
(в распределениях)

$\alpha=0.01, \beta=5, t=200$

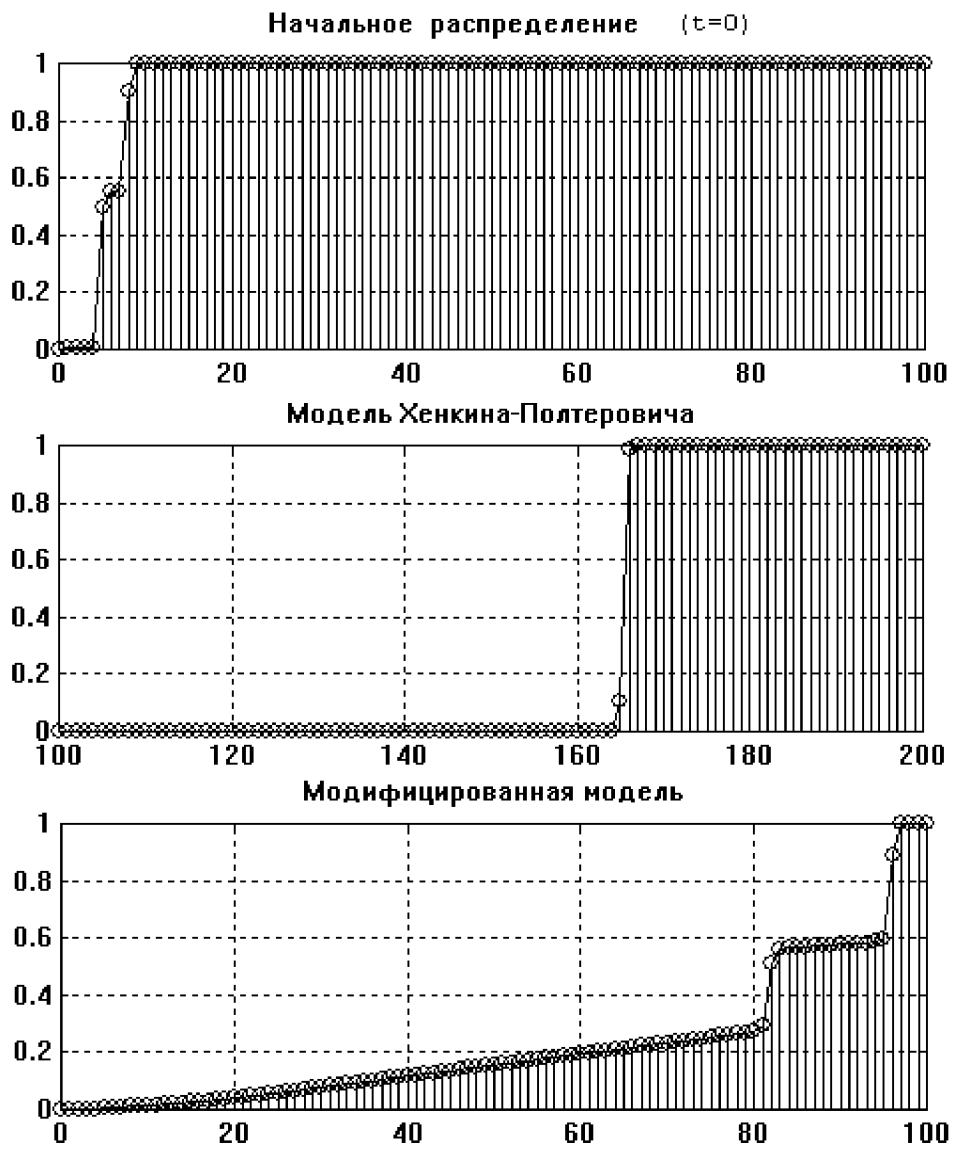


рис. 2  
(в распределениях)

$\alpha=0.01, \beta=5, t=200$

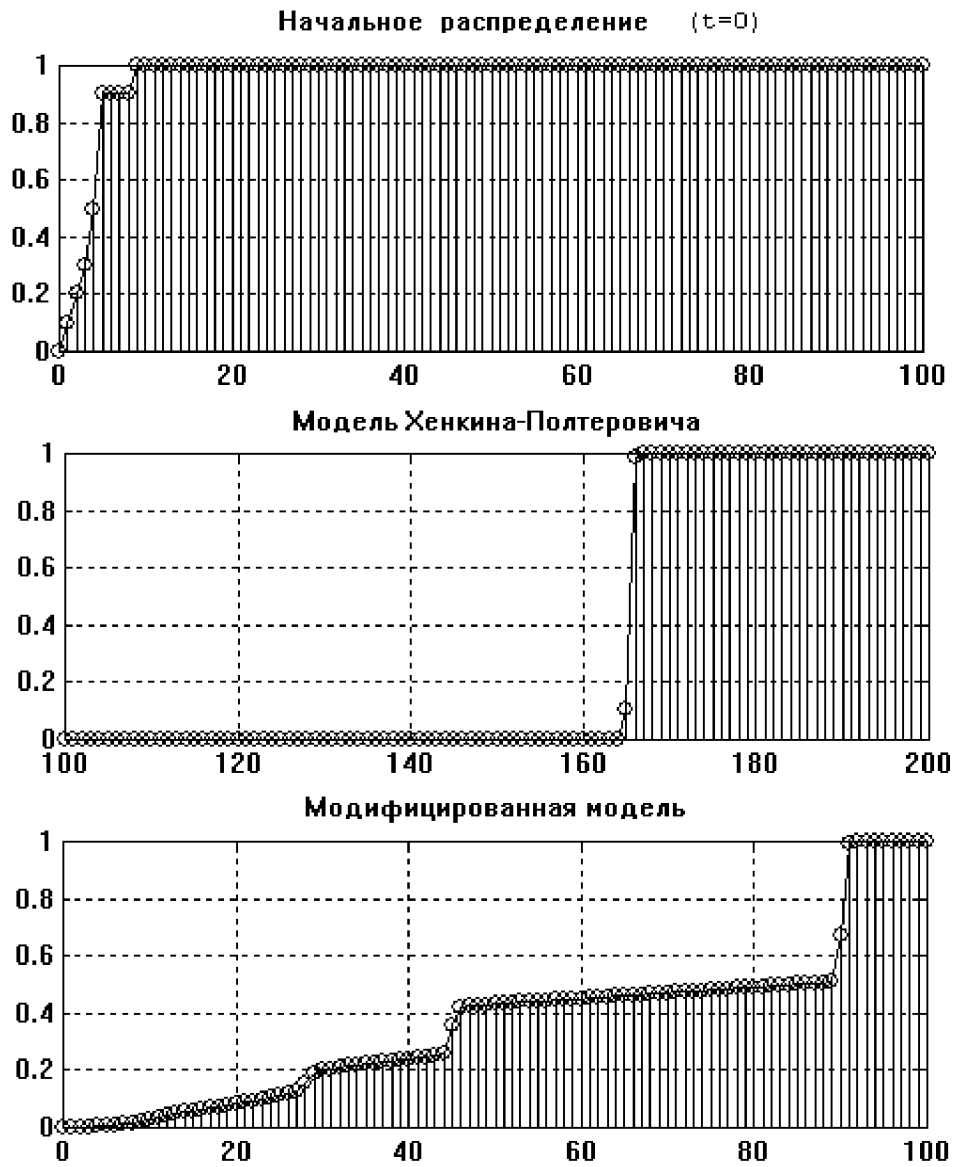


рис. 3  
(в распределениях)

$\alpha=0.01, \beta=5, t=170$

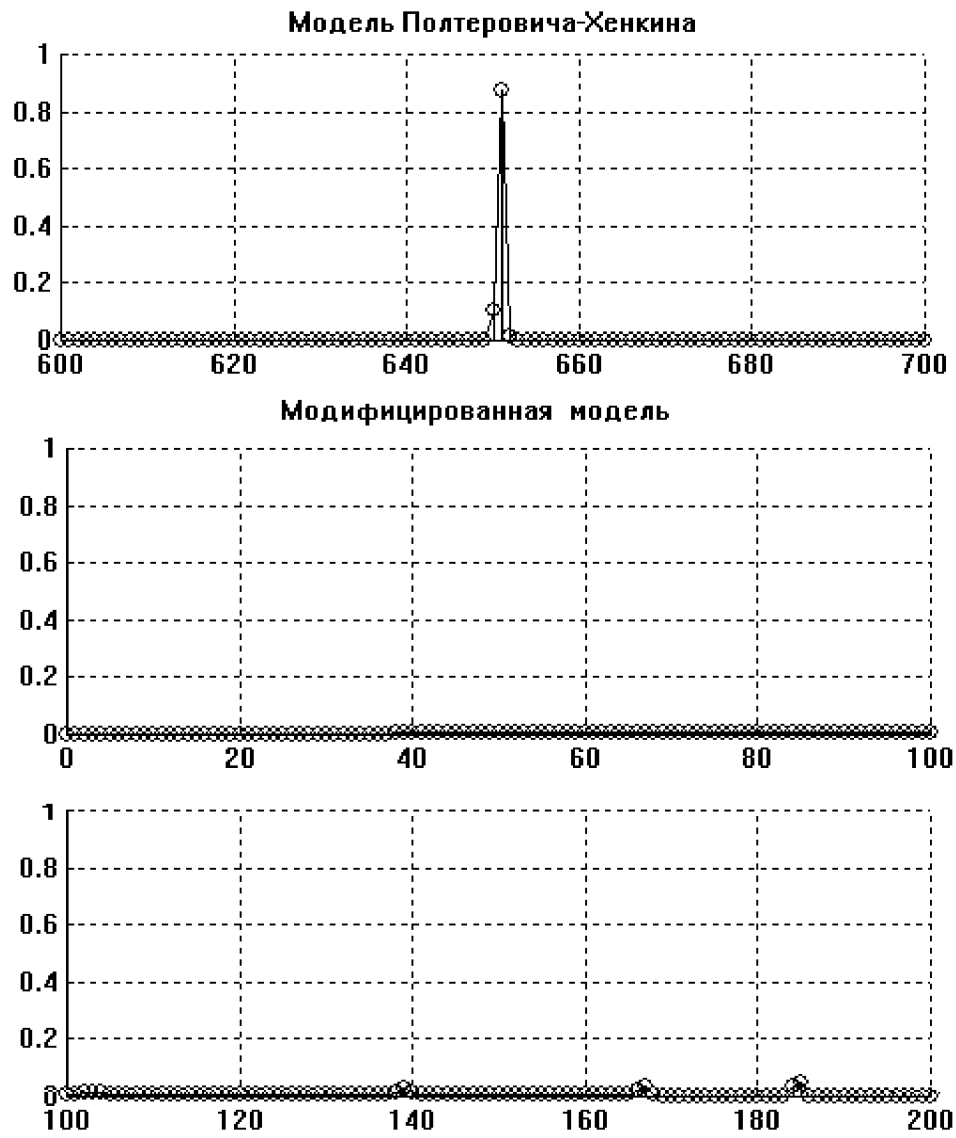


рис. 6  
( в плотностях )

$\alpha=0.01, \beta=5, t=800$

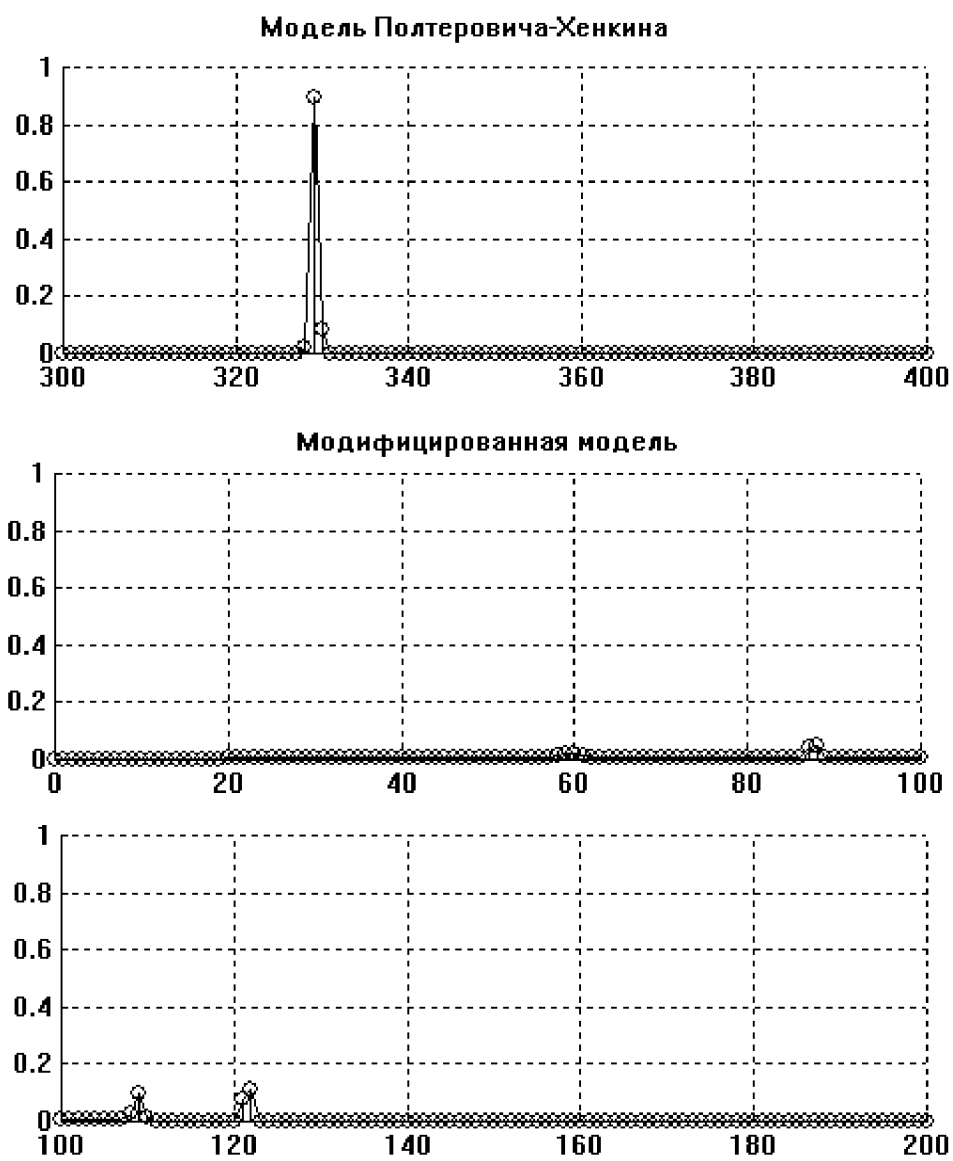


рис. 5  
( в плотностях )

$\alpha=0.01, \beta=5, t=400$

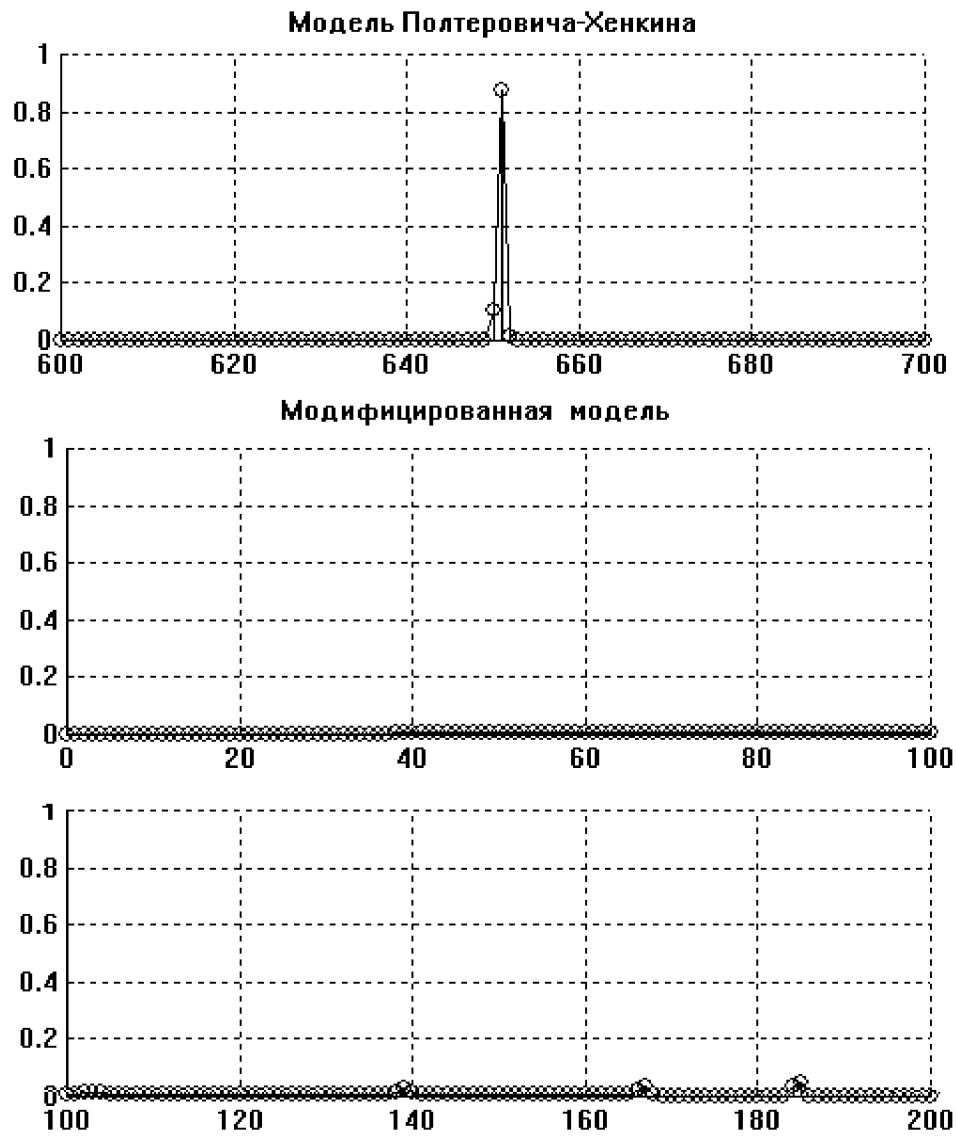


рис. 6  
( в плотностях )

$\alpha=0.01, \beta=5, t=800$

## Список литературы

- [1] *Гельман Л.М., Левин М.И., Полтерович В. М., Спивак В.А.* Моделирование динамики распределения предприятий отрасли по уровням эффективности (на примере черной металлургии). // Экономика и мат. методы, 1993. Т.29, вып.3.
- [2] *Зегвельд В., Энцинг К.* СОИ: технологический прорыв или экономическая авантюра? // М.: Прогресс, 1989.
- [3] *Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Пятаевский Л.П.* Теория солитонов. Метод обратной задачи. // М.: Наука, 1980.
- [4] *Кондратьев Н.Д., Опарин Д.И.* Большие циклы конъюнктуры: Доклады и их обсуждение в институте экономики. // М., 1928.
- [5] *Никишин Е. М., Сорокин В. Н.* Рациональные аппроксимации и ортогональность. // М.: Наука, 1988.
- [6] *Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А.* Опыт математического моделирования экономики. // М.: Энергоатомиздат, 1996.
- [7] *Полтерович В. М., Хенкин Г. М.* Эволюционная модель взаимодействия процессов создания и заимствования технологий. // Экономика и математические методы, 1988. Т. XXIV, вып.6.
- [8] *Полтерович В. М., Хенкин Г. М.* Эволюционная модель экономического роста. // Экономика и математические методы, 1989. Т. XXV, вып.3.
- [9] *Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д.* Гамильтонов подход в теории солитонов. // М.: Наука, 1986.
- [10] *Эрроусмит Д., Плейс К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. // М.: Мир, 1986.
- [11] *Henkin G.M., Polterovich V.M.* A difference - differential analogue of the Burgers equation and some models of economic development. // Universites Paris VI et VII, CNRS, 1997.
- [12] *Moser J.* Three integrable hamiltonian systems connected with isospectral deformations. // Advances in mathematics, 1975, v.16, 2.