



## Глава 1.

простейших моделей, на основе которых объясняется смысл метрических целей. Далее описывается более сложная (но, по-прежнему, условная) задача для региона. В конце главы делаются выводы из рассмотренных примеров.

### 1.1. Простейший пример

Иллюстрированы на простейшем примере. Примеры сформулированы в виде простой математической модели, не выходящей за рамки школьной математики.

**Модель выбора технологии очистки стоков предприятий.** Рассмотрим некоторое предприятие, стоки которого сбрасываются в реку, протекающую поблизости. Предположим, что предприятием невозможно изменить технологию производства, сделав ее безотходной, поэтому необходимо построить очистные сооружения, которые позволят уменьшить выброс загрязнения в реку.

Пусть  $Q$  — это единица объема сточных вод, в которых загрязнитель присутствует в количестве  $\beta_0$ . Предположим, что можно использовать две технологии очистки стоков. Обозначим через  $x_1$  количество стоков по первой технологии, а через  $x_2$  — по второй. Будем считать, что  $x_1, x_2 \geq 0$  — это те решения, которые получены в результате анализа проблемы. Тогда возможные варианты очистных сооружений

$$x_1 + x_2 \leq 1, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \quad (1.1)$$

Первое неравенство означает, что суммарная мощность оборудования должна превышать полную мощность стоков, а смысл двух последних неравенств очевиден.

Пусть  $\alpha_1$  — стоимость очистки по первой технологии, а по второй —  $\alpha_2$ . Тогда общая стоимость очистки стоков

$$C = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2. \quad (1.2)$$

з-  
 $\beta_0$ ,  $\beta_1$ , а по второй –  $\beta_2$ . Поэтому  
 $x_2$ , которое выбрасывается в реку, подсчит а-

$$x_2 = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_0 (1 - x_1 - x_2), \quad (1.3)$$

где  $(1 - x_1 - x_2)$  – объем сточных вод, не прошедших очистку.

Будем предполагать, что критериями

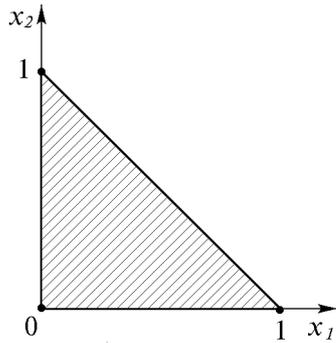


Рис. 1.1

Каждому допустимому варианту решения, т.е. точке  $(x_1, x_2)$  из заштрихованного треугольника, соо-

тветственно, рассчитываемых по формулам (1.2) и (1.3). Пусть для определенности первая технология более дешевая ( $\alpha_1 < \alpha_2$ ), но и менее эффективная ( $\beta_1 < \beta_2$ ).

Тогда (см. рис. 1.2):

- варианту решения  $(0, 0)$ , в котором очистка стоков не производится, соответствует точка  $(0, \beta_0)$ , т.е. нет затрат, но загрязнителя равен исходному;
- варианту решения  $(1, 0)$ , в котором осуществляется полная очистка на основе первой технологии, соответствует точка  $(\alpha_1, \beta_1)$ ;
- варианту решения  $(0, 1)$ , в котором осуществляется полная очистка на основе второй технологии, соответствует точка  $(\alpha_2, \beta_2)$ .

Эти три варианта изображены на рис. 1.2 для конкретных значений  $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 4, \beta_0 = 4, \beta_1 = 2, \beta_2 = 1$ .

Итак, мы нашли значения критериев для вариантов, соответствующих вершинам треугольника допустимых решений, изображенного на рис. 1.1. Легко понять (а с помощью теории линейных неравенств и доказать), что все достижимые пары значений критериев, т.е. пары значений, соответствующие решениям из треугольника на рис. 1.1, также являются треуголь-

нами  $(0, \beta_0)$ ,  $(\alpha_1, \beta_1)$ ,  $(\alpha_2, \beta_2)$ . Этот треугольник изображен на рис. 1.3.

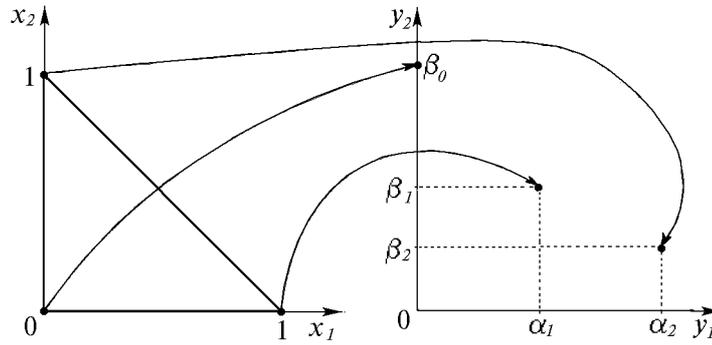


Рис. 1.2

Для тех, кто все-таки захочет проверить наши утверждения о том, что треугольник на рис. 1.3 является множеством достижимых значений критериев, можно предложить, используя соотношения (1.2) и (1.3), выразить  $y_1$  и  $y_2$  в (1.1). В результате будет получено решение которой

момент. Тот, кто заинтересован в миллионах, может предложить. В данном случае  $x_1 = 0, x_2 = 1$  и точка  $(\alpha_2, \beta_2)$  в пространстве критериев. Если кто-то хочет минимизировать затраты, то  $x_1 = 0, x_2 = 0$  и точку  $(0, \beta_0)$  в пространстве критериев. В отличие от этих решений, отражающих частные интересы, треугольник на рис. 1.3 показывает всевозможные достижимые сочетания, т.е. дает обобщенное решение.

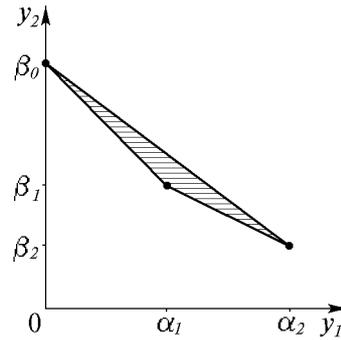


Рис. 1.3

**Некоторые подходы к задаче выбора решения.** Заметим, что в расчетах, изображенное на рис. 1.1, известны значения параметров модели (1.1). В тоже время множество допустимых решений (рис. 1.3) заранее не задано. Нам легко удалось по

связи с исключительной простотой модели. П е-  
ства достижимых целей не применялись при числе критериев, большем  
двух. В связи со сложностью их пос  
уже упоминавшиеся подходы к решению задач выбора решений: вари-  
антный (имитационный) и оптимизационный.



Рис. 1.4

ом из них, вариантно, исследователю предлагается з е-  
сколько вариантов решения, т.е. в нашем случае точек из множества на  
рис. 1.1, а затем с помощью компьютера рассчитать результат –  
татов. Схема вариантного  
подхода приведена на рис. 1.4. Он приг ден, если число допустимых  
вариантов мало. Если же число допу тимых вариантов велико или, как в  
нашем случае, бесконечно, все варианты просмотреть не удастся. Поэто-  
тный метод является, по существу, не обосно-  
ванным.

подход. От человека требуют задать так называемую свертку критериев,  
т.е. функцию, с помощью которой можно сравнивать сочетания значений  
– чем больше значение функции, тем лучше сочетание значе-  
<sup>1</sup>. Далее компьютер находит допустимое решение, которое приводит к  
целевой функции среди всех достижимых точек.

Распространенным (и наиболее наглядным и простым) вариа п-  
тимизационного подхода является целевой метод. Человеку предлагается  
(не имея, конечно, картины типа изображенной на рис. 1.3) задать неко-  
торое целевое сочетание значений критериев. Затем компьютер рассчи-  
тывает вариант, результаты использования которого наиболее близки к  
выбранной цели. Схема целевого мет да приведена на рис. 1.5.

даци.  
Ясно, что хотелось бы уменьшить и затраты, и загрязнение. Поэтому  
можно предположить, что в кач е-  
выми затратами и нулевым загрязнением. Давайте для анализа последст-  
вий такого выбора целевой точки взглянем на рис. 1.3, доступный нам, но

<sup>1</sup>

ности (ценности).

не доступный для человека, выбравшего целевую точку. Какая же точка

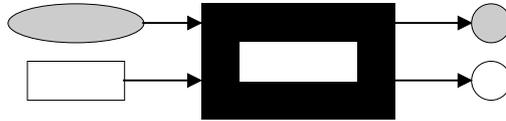


Рис. 1.5

ляется ближайшей к выбранной цели, на рис. 1.3? Если использовать обычное (Евклидово) расстояние, то на рисунке ближайшей будет точка  $(\alpha_1, \beta_1)$ , гии.

Теперь изменим единицу измерения затрат (перейдем, например, от миллионов к миллиардам рублей). Тогда треугольник преобразуется, прив денному на рис. 1.6.

$(\alpha_2, \beta_2)$ , так что предлагается выбрать вторую технологию. Наоборот, и затраты в тысячах рублей, мы получили бы, что ближайшей является точка, близкая к  $(0, \beta_0)$ , т.е. стоки почти не требуется очищать. Итак, решение зависит от выбора единиц измерения. Более того, в качестве расстояния можно, а какое-либо другое, что там.

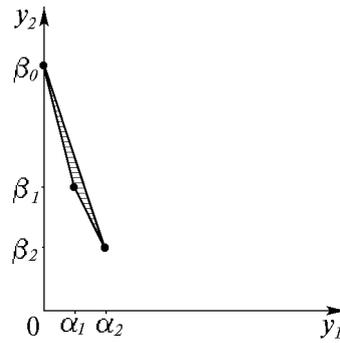


Рис. 1.6

Таким образом, результат примет

различных параметров модели, чем от предпочтений человека. Такое свойство целевого метода связано с тем, что цель была вырана (как это обычно бывает на практике) недостижимой. Это и позволило минимизировать расстояние, которое можно произвольно. Если бы человек осознал, какие цели достижимы, а какие нет, он мог бы выбрать гарантированное

расстояния не возникла бы. Более того, эта информация позволила бы человеку выбрать цель с пониманием того, что это за цели.

Метод, который рассматривается в данной книге, состоит в д- рации человеку множества достижимых целей, в выборе им достижимой цели и в расчете (с помощью компьютера) допустимого решения, приводящего к выбранной цели. Упрощенная схема да, который назван Методом Достижимых Целей (МДЦ), предста лена на рис. 1.7. Реализовать этот метод (и, таким образом, вопл полезности информации такого рода) позволили прогресс вычислительной техники и успехи прикладной математики (особенно вычислительной геометрии).

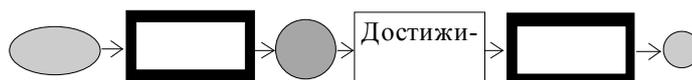


Рис. 1.7

Сделаем одно важное замечание. В традиционных постановках задач выбора решения считается, что множество допустимых реш заранее. В реальных задачах часть из огранич – этот вопрос также должен быть решен лицом, принимающим решение, или участниками переговоров. Метод до <sup>2</sup>. Пока же, чтобы не усложнять изложение, будем пре полагать, что, как обычно, множество нее.

**Недоминируемые цели.** Рассмотрим рис. 1.3 более внимательно. Мы уже говорили, что при прочих равных условиях представляет интерес – и затрат, и выбр загрязнителя. Геометрически это означает, что для некоторой цели А, т.е.  $y_1$   $y_2$ , более предпочтительные точки лежат к “юго-западу” от нее. На рис. 1.8 совокупность более предпочтительных точек выделена штриховкой. Заметим, что заштрихованная фигура, которая в школьном курсе геометрии была бы названа углом, в высшей математике называется конусом.

Взяв некоторую цель А внутри треугольника, мы сможем сразу указать такую точку В на его “юго-западной” границе, что она б . Как принято говорить, цель В доминирует цель А. Поэтому пред- е- угольника, а также на его “северо-восточной” гр нице.

<sup>2</sup>

§ 3.5.

В отличие от внутренних точек треугольника (а также его “северо-восточной” границы) цель В на “юго-западной” границе обладает следующим свойством (см. рис. 1.9): не существует такой достижимой цели С, чтобы она была лучше, чем В. Это видно из того, что заштрихованный

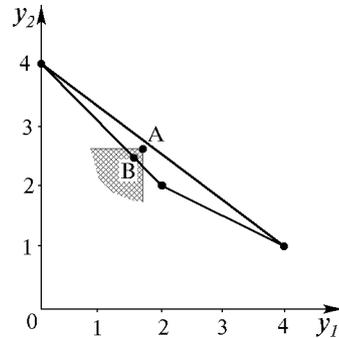


Рис. 1.8

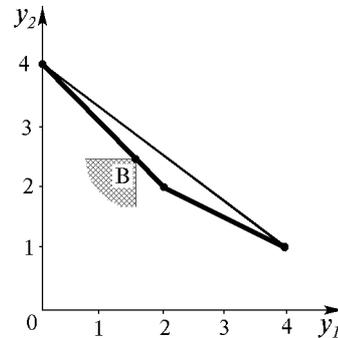


Рис. 1.9

конус точек, лучших, чем В, не пересекает достижимых целей. Достижимые цели, обладающие таким свойством, называются неулучшаемыми, или недоминируемыми.

Как уже говорилось, совокупность неулучшаемых (недоминируемых) целей называется недоминируемым, или эффективным множеством (а точнее - Парето). При разумном подходе к вопросу, цель нужно выбирать именно из совокупности недоминируемых целей, выделенной на рис. 1.9 жирной линией. Как видно, недоминируемое

множество целей естественным образом является его “юго-западной” границей.

более сложных задачах.

Итак, точки недоминируемого множества одинаково не улучшаются следующей точки зрения: улучшение значения одного из критериев возможно без ухудшения значений других. В то же время, для лица, принимающего решения, в силу его личных предпочтений, они могут быть совсем не равноценны. Скажем, точ

протест. Что же, роль человека в многокритериальной задаче состоит в том, чтобы сделать выбор среди недоминируемых вариантов. Вспомогательная роль компьютера, демонстрирующего множество достижимых целей, должен указать некоторую недоминируемую цель. Соответствующий вариант решения, который найдет компьютер, будет оптимальным.

Заметим, что при выборе целевой точки человек может р о-  
е-  
стве. В то же время, большое значение имеет так называемое объективное  
замещение между величинами критериев, т.е. наклон ломаной, описы-  
вающей недоминируемое множество. Слово “объективный” в термине  
“объективное замещение” означает, что этот наклон не зависит от чьих-  
интересов: он показывает, каким ухудшением одного показателя требует-  
ся платить за улучшение другого. В нашем случае (рис. 1.9) объективное  
вает, сколько

ля, если используются эффективные (т.е. разумные) решения.  
пользуется также термин “кривая объективного замещения между  
двумя критериями”, под которой в задачах с двумя критериями им  
виду просто недоминируемое множество. В случае большего числа кри-  
нее.

### **Разумные компромиссы.**

ы-  
о-  
веком, например, губернатором некоторого региона или, скажем, началь-  
ником бассейнового управления. Обычно же разли а-  
ления. Скажем, в  
улучшении качества воды заинтересованы, прежде всего, люди, живущие  
на реке ниже рассматриваемого предприятия. В то же время, рабочие и  
уменьшении затрат на очистку стоков. Если различные критерии отража-  
ют интересы разных лиц, недом  
ромиссов. Обсуждение и выбор компромисс-  
выдается на знании этого множества, на понимании  
териев.

Часто возникает вопрос о том, как люди могут договориться о каком-  
то компромиссе, если у них имеются различные интересы. Почему участ-  
с-  
са? Дело в том, что в реальной жизни кроме инт ресов, представленных в  
модели, имеются и другие интересы, в мод – например,

вообще. Обычно каждая из сторон испытывает те или иные неудобства от  
того, что компромисс не был достигнут. В то же время, некоторые из  
участников переговоров страдают в большей степени, чем другие, поэто-  
му более склонны к уступкам. Кроме того, конфликт, описываемый в  
модели, обычно затрагивает лишь один из многих вопросов, по которым  
приходится взаимодействовать участникам переговоров. Поэтому уступка

просах.

Вернемся к рис. 1.9. Мы видим, что при движении из точки (0, 4) в  
точку (2, 2) с ростом затрат происходит существенное уменьшение вы-  
броса загрязнения. В то же время, при перемещении из точки (2, 2) в

точку (4, 1) эффективность использования затрат значительно ниже. Это может побудить инвесторов, которые, возможно, хотели бы раньше ограничить, увеличить сумму. В то же время позиция жителей, требующих максимальной очистки стоков, может быть изменена на требование перехода в точку (2, 2), если они сочтут, что лучше синица в руках, чем журавль в облаках –

оружений, а отказ от очистки стоков по первой технологии может привести к тому, что они останутся без очистных сооружений вообще (по крайней мере, на ближайшее время). Поэтому точка (2, 2) может оказаться компромиссной целью. Впрочем, все зависит от конкретной ситуации: от остроты проблемы, т.е. от вариантов, от требуемых объемов капиталовложений и наличия средств и т.д. Так, компромиссной точкой может оказаться, например, середина отрезка между (2, 2) и (4, 1), которой соответствует решение  $x_1 = 0.5$ ,  $x_2 = 0.5$ . В любом случае, знание кривой объекту

пую.

А теперь представим себе, что могло произойти в том случае, если бы

недоминируемого множества использовались позиционные переговоры. Пусть инвесторы не желают слышать об очистке стоков, т.е. требуют выбрать точку (0, 0) на рис. 1.1. Пусть население требует полного использования второй технологии, т.е. требуют выбрать точку (0, 1). Тогда промежуточной будет точка (0, 0.5). Пусть она стала результатом компромисса позиций. Тогда, как легко заметить, соответствующее сочетание затрат и загрязнения, т.е. точка (2, 2.5), будет лежать на “северо-восточной” границе треугольника достижимых целей. Эта точка – она явно хуже точки излома (2, 2), в которой при тех же затратах загрязнение меньше. Напомним кстати, что точка излома соответствует полному использованию первой технологии. Таким образом, принцип эффективности и в этом случае.

**Случай четырех технологий.**

Если имеются четыре технологии, т.е. соотношения модели при

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 1, \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \quad (1.4)$$

По аналогии со случаем двух технологий легко понять, что многогранник в четырехмерном пространстве с пятью вершинами:

$$(0, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1).$$

Мы не станем изображать это четырехмерное множество, поскольку это затруднительно; кроме того, в изображении множества допустимых решений не так уж много проката: в практических задачах, в которых речь идет о тысячах, во внимание не принимается.

Критерии рассчитываются по формулам, аналогичным (1.2) и (1.3):

$$f_1 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4, \quad (1.5)$$

$$f_2 = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + \beta_0 (1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4). \quad (1.6)$$

Получим на пять точек:

$$(0, \beta_0), (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), (\alpha_3, \beta_3), (\alpha_4, \beta_4).$$

Параметры  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1, \beta_2$  имеют те же значения, что и в задаче с двумя технологиями, а

$$\alpha_3 = 3, \alpha_4 = 3, \beta_3 = 3, \beta_4 = 2.$$

Для этих значений параметров множество достижимых целей, оказавшееся четырехугольником, изображено на рис. 1.10. Одна точка оказа-

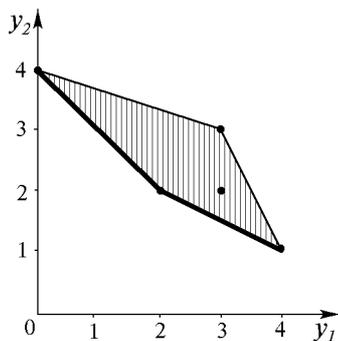


Рис. 1.10

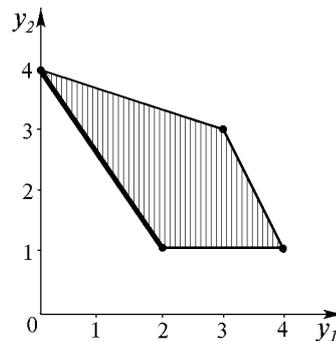


Рис. 1.11

лась внутри четырехугольника. Недоминируемое множество. Таким образом, введенные технологии не имеют отношения к критериям, и учаемых нами.

**и его визуализации.**

а-в-ке  $(\alpha_i, \beta_i)$ . В точке излома наклон кривой, т.е. объективное замещение, меняется скачком. В замещения с тысячами и даже миллионами таких изломов. Заметим, что

если модель нелинейна, то могут встретиться как постепенное (непрерывное) изменение объективного значения, так и разрывы кривой.

множества (кривой объективного значения), изображенного на рис. 1.10, определяется сочетанием параметров модели (1.4) – (1.6), т.е. при иных сочетаниях параметров форма множества будет иной. Этот факт весьма важен при выборе методов его визуализации. Пусть величина  $\beta_1$  приближается к результату действия первой технологии  $\beta_2$ , т.е. результат действия первой технологии приближается к результату второй. Тогда треугольник множества достижимых целей стремится к виду, представленному на рис. 1.11, причем при  $\beta_1 = \beta_2$  превращается до отрезка, соединяющего  $(0, \beta_0)$  с  $(\alpha_1, \beta_1)$ . Таким образом, недо-

непрерывной). Это свойство.

Действительно, арифметические операции в компьютере совершаются с определенной ошибкой (ошибкой округления). В связи с этим, результат обычно соответствует не исходным параметрам задачи, а их некоторому, возмущенному значению. Поэтому отсутствие непре-

делает задачу его построения, как принято говорить в математике, нерегулярной. В связи с этим, мы не пытаемся его описать, а изображаем его в виде границы множества достижимых целей. Исследования показали, что в разумно сформулированных задачах множество достижимых целей непрерывно зависит от параметров.

#### Другой пример.

и множества, отличающегося от приведенного на рис. 1.9. Распространены технологиями выращивания зерновой культуры. Первая технология характеризуется урожайностью, вторая – урожайностью. Пусть  $x_1, x_2$  – площади, занятые первой и второй технологиями соответственно. Тогда, если предположить, что общая площадь равна 1,

$$x_1 + x_2 \leq 1, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Эти соотношения совпадают с (1.1), и, таким образом, множество допустимых вариантов имеет вид, приведенный на рис. 1.1. Пусть затраты воды

$$f_1 = \delta_1 x_1 + \delta_2 x_2,$$

$\delta_1, \delta_2$  – удельные затраты воды, а сбор урожая

$$f_2 = \Delta_1 x_1 + \Delta_2 x_2,$$

$\Delta_1, \Delta_2$  – урожайности. Множество достижимых целей, характерных затратами воды и урожаем, имеет вид, изображенный на рис. 1.12.

ды, то недоминируемой границей является “северо-западная”, которая выделена на рисунке.

Таким образом, вопрос о том, какая часть границы множества достижимых целей является недоминируемой, зависит не от модели, а от направления улучшения значений критериев. Часто встречаю двумя критериями, в которых значения обоих критериев надо увеличивать. Легко понять, что в этом случае интерес представляет “северо-западная” граница мно

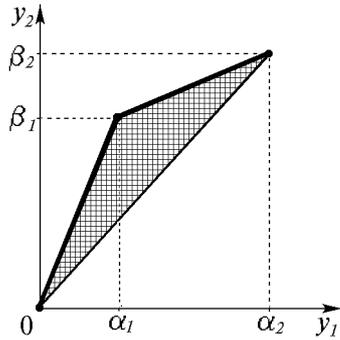


Рис. 1.12

**Заключение.**

распространение. Наскол известно, для линейных мод жена в 1955 г. операций С.Гассом и Т.Саати [70].

технических или иных систем (метод “затраты-тивность”), при в вариантах капиталовложений, при выборе структуры пакета акций (так наз стве и т.д. Наша задача состоит в том, чтобы распростр нить эти достижения на случай трех, четырех, пяти териев.

**1.2. Случай трех критериев.**

Если число критериев больше двух, то множество достижимых целей (или его недоминируемая граница) не могут быть изображены в виде плоских фигур. Уже в случае трех критериев недоминируемая гран – это обычно некоторая поверхность, представляющая собой часть границы рного множества. Поэтому использовать ге (типа “юго-западной границы”) для того, чт множество, удастся не сразу. В то же вр мя, метод достижимых целей и-руемого множества, аналогичные во многом обы картам.

дели. стоков предприятия. Рассмотрим логиями (1.4), (1.5), (1.6). Пусть выбора решения: кроме сто а-т-во нового загрязнителя, вносимого очистки (многие из исполь такое негативное свойство). Количество нового загрязнителя, кот

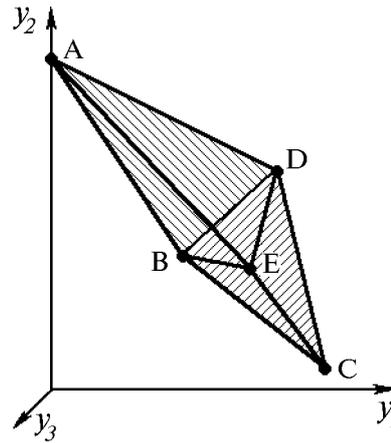


Рис. 2.1

з, рассчит т-

$$z = \gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2 + \gamma_3 y_3 + \gamma_4 y_4,$$

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$  – соответствующие коэффициенты. Первые два крит (1.5) и (1.6). Множество достижимых целей будет представлять собой многогранник, натянутый на этих точках:

$$A = (0, \beta_0, 0), B = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), C = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2),$$

$$D = (\alpha_3, \beta_3, \gamma_3), E = (\alpha_4, \beta_4, \gamma_4).$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$$

чения, что и раньше, а

$$\gamma_1 = 3, \gamma_2 = 4, \gamma_3 = 1, \gamma_4 = 5.$$

Для этих значений параметров множество достижимых целей, являющееся **ABCDE** нами, на рис. 2.1. Недоминируемое множество состоит из двух **ABD** **BDC**, заштрихованных на рисунке. Как видно, область можно, да и значения критериев известны только в вершинах (благодаря тому лишь, что мы выписали их заранее). Поэтому для лизации.

. При этом для случая трех критериев под дв сечением понимается совокупность сочетаний значений двух критериев, достижимых при некотором фиксированном значении третьего. В даль-

мерные сечения, так что слово “двумерное” будет опускаться.

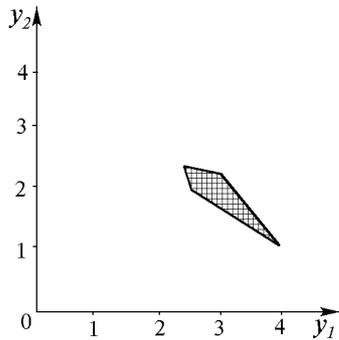


Рис. 2.2

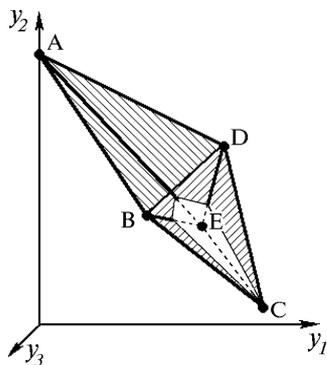


Рис. 2.3

Рассмотрим рис. 2.2, на котором прицелимся для рассматриваемой нами задачи,  $n = 4$ . Положение этого

рис. 2.3. Что можно сказать про это сечение? На рис. 2.2, как и на рис. 1.3, сразу можно увидеть “юго-западную” границу сечения. Мы, однако, не отметили ее на этом рисунке, поскольку, в отличие от рис. 1.3, заранее нельзя сказать, является эта граница сечением

достижимых целей или нет.

Наше затруднение легко понять: ведь

множества достижимых целей, изображенное на рис. 2.1 –

множества. Взглянув на рис. 2.3, легко понять, что в данном случае это именно – и-руемое множество в точке С. Поэтому на рис. 2.2 все точки сечения, кроме точки, совпадающей с С, доминируемые. Их

решения. Таким образом, увеличение числа критериев до трех (не говоря о четырех, пяти и большем числе критериев) приводит к резкому усложнению задачи.

Вопрос состоит в следующем. Для того чтобы понять структуру и-руемого множества, можно рассмотреть достаточно полный набор сечений.

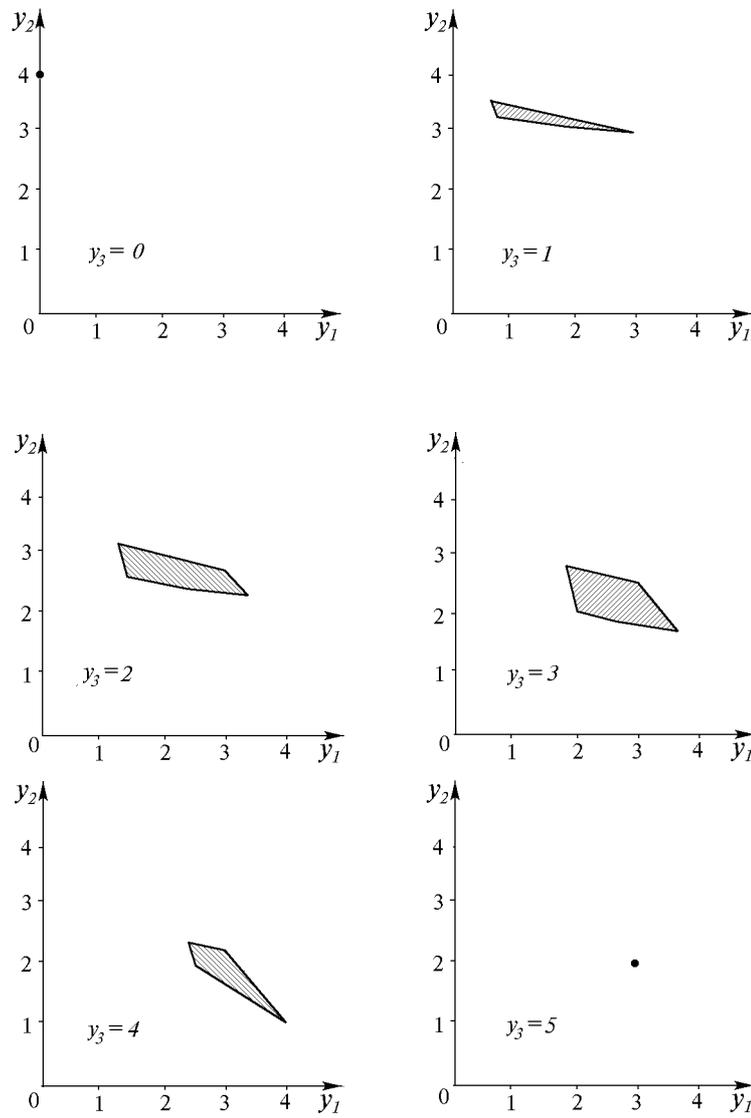


Рис. 2.4

На рис. 2.4, например, приведена серия рисунков, на каждом из которых, укажем занное около рисунка.

на одном рисунке (рис. 2.5). Каждый из этих способов имеет свои достоинства и определенные недостатки.

Так, серия рисунков позволяет хорошо рассмотреть каждое сечение отдельности, но в то же время сопоставление сечений затруднительно. Анализируемого множества! С другой стороны, на рис. 2.5 легко проследить за его границей.

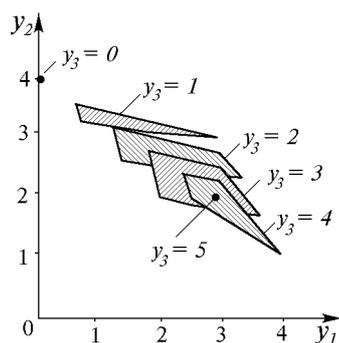


Рис. 2.5

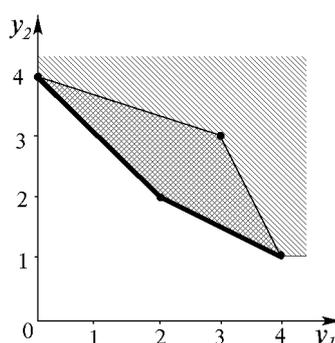


Рис. 2.6

Конечно, опытный и настойчивый исследователь, имеющий богатое пространственное воображение, сможет обнаружить и исследовать множество на основе рис. 2.4 или рис. 2.5. Нам, однако, это не может устроить, поскольку наша задача —

исследовать. Поэтому вместо наборов сечений множества достижимых целей исследуем его границу.

#### –Парето и ее сечения.

двумя критериями (1.4) – (1.6). Рассмотрим заштрихованное множество на рис. 2.6. Оно отличается от четырехугольника множества достижимых целей на рис. 1.10 тем, что этот четырехугольник попространству критериев, которые доминируются точками четырехугольника. Ясно, что хотя множество на рис. 2.6 шире множества достижимых целей, оно имеет ту же недоминируемую границу.

–Парето (ОЭП) множества достижимых целей принято называть

достижимых целей, критериальными точками. Оно названо так в честь математиков, разработанных.

ки ОЭП:

Глядя на рис. 2.6, нельзя понять, чем изображение ОЭП предпочтительнее изображения множества достижимых целей. Хотя в ОЭП исчезла доминируемая граница множества достижимых целей, бл

а-ницы, это преимущество при двух критериях не является серьезным. Иное дело, если число критериев больше двух.

На рис. 2.7 приведена серия рисунков, на каждом из которых изображены технологии и тремя критериями. Сечения ОЭП изображены на рис. 2.4. На рис. 2.7 также хорошо видны “юго-западные” границы.

– при улучшении (в нашем случае уменьшении) величины третьего показателя сечения ОЭП могут лишь сужаться, вкладываясь одно в другое. Так, сечение для  $y_3 = 4$  не шире сечения для  $y_3 = 5$ . Далее, сечение для  $y_3 = 3$  не шире сечения для  $y_3 = 5$ , и т.д.

ом сечений ОЭП: двумерное сечение ОЭП, полученное при фиксированном значении третьего критерия, содержит все такие пары значений двух критериев, которые достижимы при некотором значении третьего критерия, не худшего, чем фиксированный.

Сказанное объясняет смысл “юго-западной” границы сечений ОЭП: любая точка, лежащая на “юго-западной” границе сечения, порождена некоторой недоминируемой целью, значения первых двух критериев в которой совпадают с координатами точки, а третий критерий имеет значение, не худшее, чем фиксированное. Благодаря этому, двумерное сечение ОЭП имеет замечательное свойство: ед

3. Этим сечения ОЭП принципиально отличаются от множества целей. Так, точка  $(y_1^*, y_2^*)$  на “юго-западной” границе сечения  $y_3 = 3$  на рис. 2.7 порождена некоторой недоминируемой целью  $(y_1^*, y_2^*, y_3)$  с  $y_3$ , не большим (т.е. не худшем) чем 3.

Таким образом, изучение одного сечения ОЭП позволя

критериев.

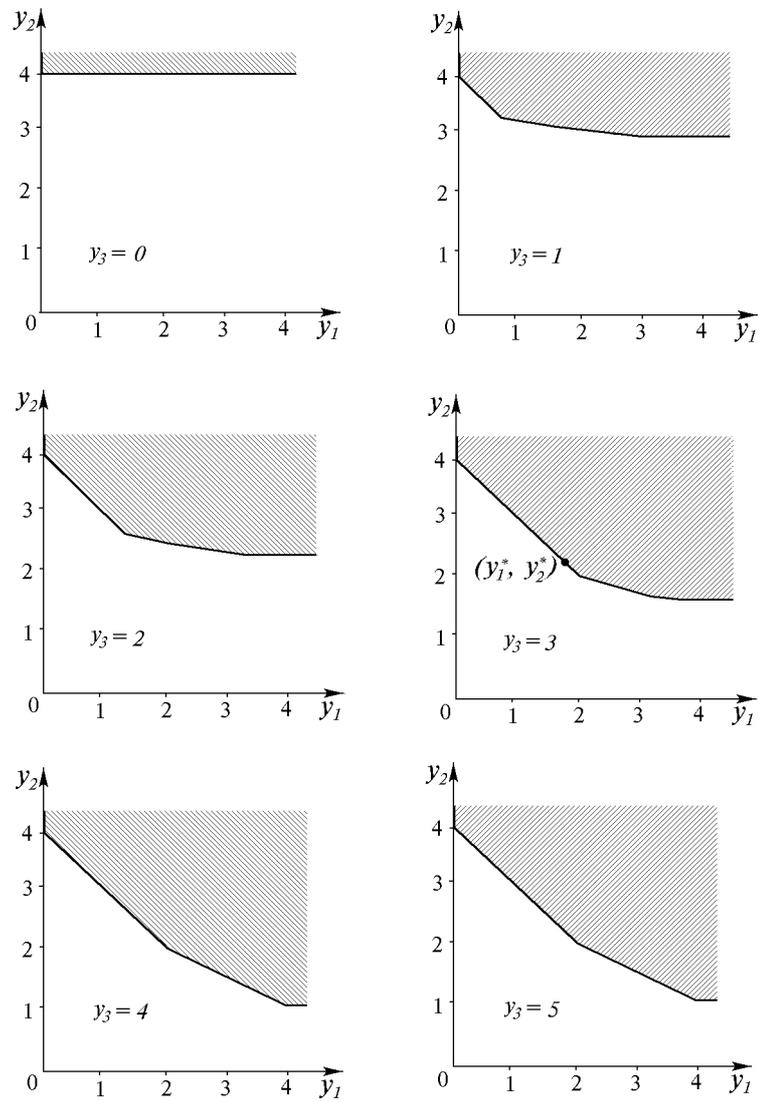


Рис. 2.7

случае, положив  $\beta_3 = 3$ , на основе рассмотрения границы соот- ю-  
 ж-  
 $\beta_3$ , не большем, чем 3. Переход от о  
 показывает, как ужесточение требований к  $\beta_3$  с-

**Кривые объективного замещения для трех критериев.** е-  
 “юго-западная” граница с  
 $\beta_3$ , то ее можно на-

данного ограничения на значение третьего. Рассмотрим кривые об к-  
 тивного замещения на рис. 2.7.

$\beta_3 = 0$  сечение ОЭП имеет единственную “юго-западную” точку  
 $(0, \beta_0)$ , т.е. для этого значения  $\beta_3$  у-  
 лась в единственную точку. Заметим, что точка  $(0, \beta_0)$  уже встречалась  
 риями. Как видно,  
 введение третьего критерия не повлияло на ее недоминируемость: при  
 некотором значении третьего критерия (ясно, что это  $\beta_3 = 0$ ) сочетание  $(0,$   
 $\beta_0)$  описывает недоминируемую цель. Имеет место общее правило: при  
 введении нового критерия “старые” (двумерные в данном случае) недо-  
 рождают недоминируемые цели.

и-  
 цы сечение расширяется. При этом  
 о-  
 кривой. При дальней-  
 а-  
 терия до двух, трех  
 ние ОЭП расширяется, а  
 я-  
 ет вид. Дальнейшее снижение требова-  
 ний к выбросу нового загрязнителя, т.е.  
 $\beta_3$  до пяти, не  
 з-  
 можностей, что выражается в отсутст-  
 а-

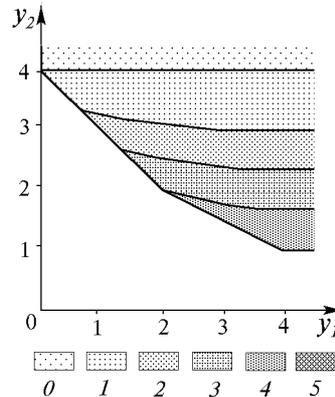


Рис. 2.8

нении прежней кривой объективного замещения. Таким образом, ограни-  
 яние.

опрос: как найти недоминируемую цель, соот-  
 ветствующую недоминируемой паре значений двух критериев? Это мож-  
 но сделать, если наложить сечения ОЭП одно на другое по аналогии с  
 наложением сечений множества достижимых целей на рис. 2.5.

**Карты решений.** Сечения ОЭП, изображенные по отдельности на  
 рис. 2.7, наложены одно на другое на рис. 2.8. Для этого они предв  
 ительно заштрихованы различными штриховками. Соотношение между

ком. На цветном мониторе сечения различными цветами. Отметим, что, в отличие от рис. 2.5, на котором сечения пересекались, здесь сечения вкладываются одно в другое (это является следствием нерасширения сечений при улучшении значения третьего критерия). Поскольку границы сечений не пересекаются, зовут их границы. При этом можно использовать штриховку, а изобразить только границы. При этом можно использовать штриховку, а изобразить только границы.

Самое широкое сечение из рассмотренных на рис. 2.7 –  $z_3 = 5$ , т.е. для худшего значения третьего критерия из приведенного на рисунке. На это максимальное сечение сверху наложено другое сечение, соответствующее  $z_3 = 4$ . Поскольку эти сечения сопадают, то сечение  $z_3 = 5$  не видно под сечением, соответствующим  $z_3 = 4$ . В свою очередь, на сечение при  $z_3 = 4$  наложено сечение, соответствующее  $z_3 = 3$ . Сечение  $z_3 = 4$  более широкое, чем сечение  $z_3 = 3$ , поэтому под сечением, соответствующим  $z_3 = 3$ . Сечения при  $z_3 = 2$  и  $z_3 = 1$  еще уже, и, наконец, сечение, соответствующее  $z_3 = 0$  – узкое.

Поскольку “юго-западные” границы сечений на рис. 2.8 не пересекаются и в то же время их легко сравнивать между собой, можно оценить и третью координату недоминируемой цели, соответствующую

паре  $(x_1^*, y_2^*)$  на рис. 2.7. Прежде всего заметим, что все точки  $(x_1, y_2)$  координатной плоскости  $(x_1, y_2)$  типа:

- 1) недостижимые – и
- 2) недостижимые – и
- 3) доминируемые точки (недостижимые и достижимые – различаются в ОЭП), через которые не проходит ни одна кривая объективного замещения.

чтобы разбить точки плоскости на три типа, достаточно взглянуть на рис. 2.8. К интересующему нас второму типу принадлежат точки, через которые прошла “юго-западная” граница сечения в процессе его расширения. На рис. 2.9 для точек второго типа штриховка снята, а на рис. 2.10 они выделены в отдельности. Для того

чтобы определить значение третьего критерия, которое соответствует доминируемой цели, достаточно определить, при каком

$z_3$  достигается минимальное значение.

Вернемся к рис. 2.8. Поскольку ноль является самым лучшим значением, точке  $(0, 4)$  соответствует недоминируемая цель  $(0, 4, 0)$ . Для

достаточно понять, как расширяется сечение с ухудшением. Так, точка  $(2, 2)$  впервые попадает в сечение при  $y_3 = 3$ . Поэтому она соответствует достижимой недоминируемой цели  $(2, 2, 3)$ . Точка  $(4, 1)$  по

прежнему является недоминируемой целью. Для цели  $(y_1^*, y_2^*, y_3^*)$  можно утверждать, что значение  $y_3^*$  равно  $y_3 = 2$  и  $y_3 = 3$ , так как при  $y_3 = 2$  точка  $(y_1^*, y_2^*)$  еще не принадлежит сечению, а при  $y_3 = 3$  — принадлежит. Значение  $y_3^*$  (а также значение третьего критерия для этих достижимых недоминируемых целей) можно определить, взяв до-

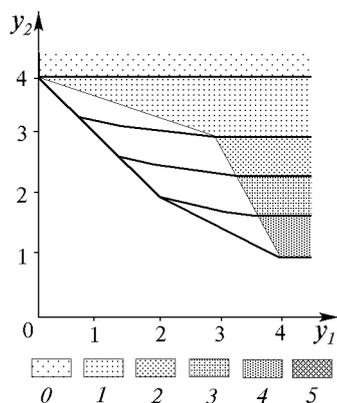


Рис. 2.9

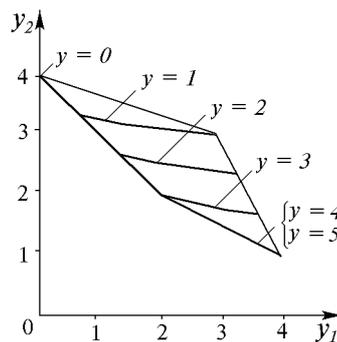


Рис. 2.10

3. Мы рассмотрим его через несколько страниц, сейчас же введем понятие карты решений.

критериями, в координатах которых изображаются сечения. Заметим, что рисунок типа рис. 2.8 позволяет также оценить объект.

Для того чтобы осознать этот факт, достаточно заметить, что рис. 2.8 напоминает географическую карту, изображающую склон холма. Линии, которые приведены на рис. 2.8, можно сопоставить линиям уровня высот географической карты. Третье значение  $y_3$  называется, насколько данное сечение ниже вершины, поэтому его влияние оценивается подобно тому, как это делается на географической карте. Близость между линиями означает очень крутой склон, а их наложение — обрыв.

Рисунки типа рис. 2.8 будем называть картами решений. Точнее говоря, под картой решений традиционно принято понимать сов

о-стями, характеризуемыми постоянным значением  $\beta_3$ . Эти сечения изображают на плоскости  $(y_1, y_2)$ . Традиционная карта решений для рассматриваемой нами задачи приведена на рис. 2.10. Традиционное понимание

резко меняется при малом изменении параметров задачи. Соответствующе-

предыдущем параграфе для задачи с двумя критериями  $y_1$  и  $y_2$  (см. рис. 1.11). На рис. 2.11 изображены ОЭП для этой же задачи, когда  $\beta_1 = 1 + \varepsilon$ ,  $\varepsilon$  - жите льное число, и когда  $\beta_1 = \beta_2$ . Хотя недо и-руемые множества резко отличаются друг от друга, ОЭП близки! Таким образом, ОЭП устойчива (т.е. меняется мало) при малых возмущениях параметров задачи.

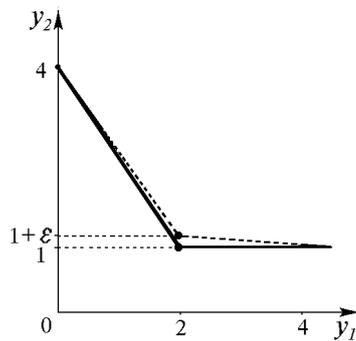


Рис. 2.11

и-виде границ сечений ОЭП (типа рис. 2.8) – о-

замещения, но устойчивы к м возмущениям. Кроме того, их рывы, которые за-лиз. Штриховка сече-

более наглядными. Поэтому в даль-

рис. 2.8, которые представляют собой совокупности сечений ОЭП.

Отметим, что термин “карта решений” довольно неудачен, так как на самом деле изображаются не сами решения, а достижимые недоминируемые сочетания значений критериев. Конечно, сово-

совокупность эффективных решений, но только ным образом. И все же, поскольку термин “карта ре ний” обще нят, мы будем аться им в дальнейшем.

**Диалоговые карты решений.** Анализ карты решений на рис. 2.8 шений, отличающейся от исходной лишь тем, что шаг разбиения по  $\beta_3$  е-лок.

На рис. 2.12 диапазон значений  $\beta_3$  а- $\beta_3 = 0, 0.5, \dots, 5$ . Подробное разбиение позволяет более т е-лить, какие значения третьего критерия составляют н цель вместе с недоминируемыми точками  $(y_1, y_2)$ . В частности, удастся

установить, что точке  $(y_1^*, y_2^*)$  соответствует достижимая недоминируемая точка  $y_3^* = 2.5$ . В то же время, для  $y_3$  у-

равным 0.1.

$(y_1, y_2)$ , если продемонстрировать мультфильм, в котором по  $y_3$  б-но сменяются кадры, изображающие расширение сечения при ухудшении гом.

Заметим, точки зрения, например, с точки зрения влияния затрат на уменьшение выброса обоих загрязнителей. Для этого требуется ра

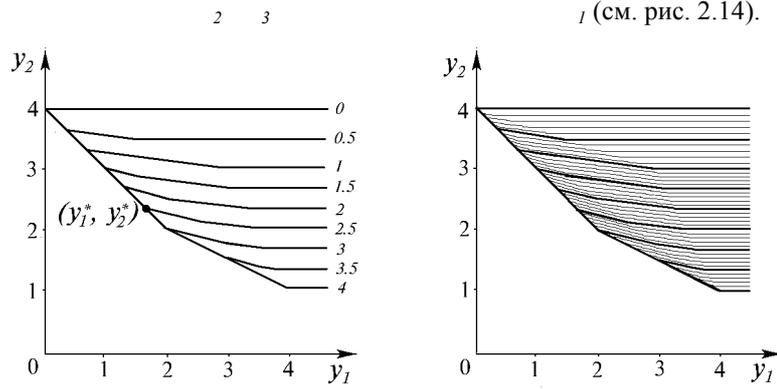


Рис. 2.12

Рис. 2.13

$y_1$  из интервала от нуля до десяти. Сразу видно, что в сечении  $y_1 = 0$  имеем единственную “юго-западную” точку  $(0, 4)$ , которая соответствует недоминируемой цели  $(0, 4, 0)$ . При росте  $y_1$  точки кривой объективного замещения, пр т-ни.

$y_1 = 4$  сечение перестает расти, что показывает нер м-ность дальнейшего увеличения затрат. Информация, полученная на основе сечений рис. 2.14, существе но дополняет рис. 2.8.

Зададимся вопросом, как можно получить этот рисунок, а также многие другие, которые могут понадобиться при исследовании ОЭП? Известный подход к изучению взаимосвязи трех критериев состоит в том, что предлагается заранее строить карты решений [48]. Такой подход не нашел широкого практического применения, по н-о-е-жестве. Действительно, для того чтобы изучить е-

рафе, нам прие-  
е-  
рию, а также взглянуть на него с разных сторон. Б лее того, хот  
ный фильм. образом,  
ство, с  
го можно было бы получить любые сечения ОЭП (и  
фильмы!) по своему заказу. Т р-  
ний (ДКР) – чение компьютеров, разр о-  
жимых целей.

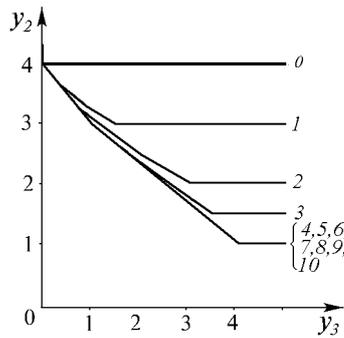


Рис. 2.14

Итак, демонстрация Диа  
предварительном построении ОЭП.  
многие часы (все зависит от сло  
тера).  
кату решений (или набор карт  
решений, если число критериев  
больше трех) всего за несколько

пьютерах. В то же  
мя, де  
ра (например, сор Pentium).  
Итак, пользователь изучает – тер. При  
т-

рению. Это значительно облегчает понимание структ  
позволяет делать осознанный выбор достижимой цели. Использование  
тивно. Еще более полезно  
использование мультфильмов в случае большего числа критериев, кото  
рый будет рассмотрен в следующей главе.

**Заключение.** Итак, двумерные сечения ОЭП имеют  
свойства. Главное состоит в том, что единственное сечение по  
а-  
ничении на значение третьего. Благодаря этому сечения ОЭП предпочти-  
тельное сечений множества достижимых целей. По

основном сечения ОЭП. В то же время, в задачах, в которых наборы се-  
чений множества достижимых целей достаточно информативны, мы бу-  
ры.

ратимся теперь к задаче принятия решения, близкой к реал –  
она.

### 1.3. Компромиссные стратегии специализации региона

**Описание проблемы.** Представим себе регион, расположенный в бассейне Реки, которая протекает через Озеро и впадает в Море (карта региона приведена на рис. 3.1). Озеро используется как источник питьевой воды для жителей Города, расположенного недалеко от Озера, а также является популярным местом отдыха и туризма. Реку регулирует плотина. Кроме Реки, в Озеро впадает еще одна небольшая река. Ниже Озера в Реку впад



Рис. 3.1

производства: одна – выше Озера, другая – ниже. Основное место в производстве занимает растениеводство, а именно, выращивание зерновых культур. В течение долгого времени сельскохозяйственное производство мирно сосуществовало с рекреационным бизнесом, освоившим побережье озера, а также с потребностями коммунального

ства Города в питьевой воде. Однако с течением времени земледелия, основанного на использовании интенсивных технологий выращивания зерновых. Это привело к возникновению конфликта с бизнесменами и горожанами, поскольку технологии требуют больших объемов воды для орошения, а также химических удобрений. Вода для орошения должна браться из Реки, и в состоянии, так как будет содержать некоторую долю удобрений. Поэтому сельскохозяйственной зоне горожанам пришлось бы пить загрязненную воду.

<sup>3</sup>

– упрощенный вариант задачи, из

[65].

Нижняя сельскохозяйственная зона, хотя и не воздействует на Озеро непосредственно, также оказывает влияние на жизнь горожан. Дело в том, что при впадении Реки в Море расположены виллы б с-менов, высокопоставленных чиновников и других вли тельных лиц, ко- за количеством и качеством воды (контрольный пункт А). Поэтому при о-полнительный попуск воды через плотину для того, чтобы выполнить ограничения на количество воды в Реке и разбавить загрязнение. Допол-нительный попуск воды через плотину вызовет падение уровня в Озере. Ухудшатся условия отдыха на Озере, из- н-ников курортов, пансионатов и других рекреационных заведений, распо-ложенных на берегу.

Таким образом, конфликт возник между интересами тех, кто п-доход от сельскохозяйственного производства, от рекреац е-са, и простыми жителями города, интересующимися в основном качест-вом питьевой воды. Перед депутатами Областной Думы встал вопрос о том, следует ли разрешить забор воды для орошения и выброс загрязни-телей, т.е. речь шла о специализации сельскохозяйственного производст-циальных последствий.

Предположим, что после предварительного обсуждения предст е-три критерия, выражающих меру удовлетворения гла- групп населения: фермеров, владельцев рекре о-стых горожан. Интересам первой группы соответствует увеличение чист-того дохода от растениеводства (он измеряется в процентах от его макси-мально возможной величины в регионе). Интересам второй группы отве-чает увеличение прибыли от рекреационного бизнеса (она также измеряется в процентах от максимально возможной величины). Интере-тоят в том, чтобы уменьшить число заболевших из-загрязнения питьевой воды, которое измеряется числом заболевших в расчете на 10 тысяч жителей.

Варианты специализации сельскохозяйственного производства, один из которых должна рекомендовать Дума, описываются распр х-нологиями выращивания зерновых. Отметим, что с вопросом о развитии

а. Решение по нему тоже включается в вариант про-екта, рассматр ваемого Думой.

**Математическая модель.** о-нятии технологии сельскохозяйственного производства. Понятие произ-и-чественном анализе экономических проблем. Рассмотрим это пон тие.

Пусть известно, что рациональное использование 240 куб.м воды и 40 кг удобрений в расчете на 1 га приводит к сбору зерновых в 24 ц. Естественно ожидать, что на 10 га при рациональном использовании 2400 куб.м воды и 400 кг удобрений будет собрано 240 ц зерновых. Таким образом, при увеличении в 10 раз масштаба производства (в соответствии с увеличением используемой площади) соотношение между затратами и сбором урожая не меняется. В этом случае для описания производства достаточно рассмотреть технологии в расчете на 1 га, которые будут использоваться в агроэкологическую технологию земледелия. Технологии производства – описание производственных процессов, результат их математического моделирования.

Таблица 1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
зерновых, ц	6	12	16	20	24	24	32	36	44
Затраты воды, м <sup>3</sup>	0	120	240	120	240	120	240	240	360
Затраты удобрений, кг	0	0	0	40	40	80	80	120	120
Возврат воды, м <sup>3</sup>	0	24	48	24	48	24	48	48	72
Загрязнение, кг	0	0	0	6	6	12	12	18	18

технологии. Пусть при использовании описанной технологии с охвата территории в 1 га возвращается 48 куб.м воды, унося с собой 6 кг удобрений в качестве загрязнения. Тогда можно рассмотреть агроэкологическую технологию, включающую в себя и побочные эффекты производства.

Мы не будем рассматривать вопросы построения технологий. Отметим лишь, что в рассматриваемой модели производство описано конечным числом технологий. В верхней зоне можно использовать технологии, приведенных в табл. 1 (параметры даны в расчете на 1 га, указанных выше).

Как видно, первая технология не использует ни воды, ни удобрений, но имеет высокую продуктивность. Вторая и третья технологии используют воду, но не удобрения. Их продуктивность выше, чем у первой технологии. Следующие технологии характеризуются высокой продуктивностью (и затратами ресурсов). Наиболее продуктивной является технология, но она требует больших затрат воды и вызывает сильное

загрязнение. Использование каждой из технологий и-  
 тельно определенный чистый доход, также пропорциональный площади, на  
 ся.

ользовать девять технологий, прив  
 далее в табл. 2. Как видно, урожайность здесь несколько ниже, чем в  
 верхней зоне.

Человек, искушенный в моделировании сельскохозяйственного про-  
 изводства, заметил бы, что в реальной жизни сельском хозяйстве х-  
 нология обычно связывается с севооборотом, т.е. с целым набором куль-  
 тур. В данном исследовании это не учитывается, чтобы не усло  
 описание.

сельскохозяйственного производства и значениями критериев, которые  
 дают меры учета интересов различных групп населения, задается  
 математической моделью, описывающей связь производственной

Таблица 2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
зерновых, ц	6	12	14	20	22	24	32	34	40
оды, м <sup>3</sup>	0	120	240	120	240	120	240	240	360
Затраты удобрений,	0	0	0	40	40	80	80	120	120
Возврат воды, м <sup>3</sup>	0	24	48	24	48	24	48	48	72
Загрязнение, кг	0	0	0	6	6	12	12	18	18

деятельности с экономическими и социальными результатами. Мы не  
 ли подробно, заметим лишь, что в  
 ней также используются балансы воды и загрязнителей. Кроме того, в

(т.е. возможные распределения площадей между технологиями и объемы  
 попуска воды через плотину). Хотя модель<sup>4</sup> довольно проста, члены

соответствующие эксперты. Задача политиков –  
 компромисс, который в методе достижимых целей может быть получен  
 ели, только на основе использования ОЭП

<sup>4</sup> Она описана в книге [37], с. 228 – 230.

множества достижимых целей. Далее мы будем полагать, что ОЭП уже  
мы.

Заметим, что среди компьютерных систем поддержки переговоров принято выделять два основных типа:

- системы для поддержки предварительного этапа переговоров, со-  
е-  
ров,
- системы для поддержки собственно переговоров.  
емах первого типа. Вопрос о

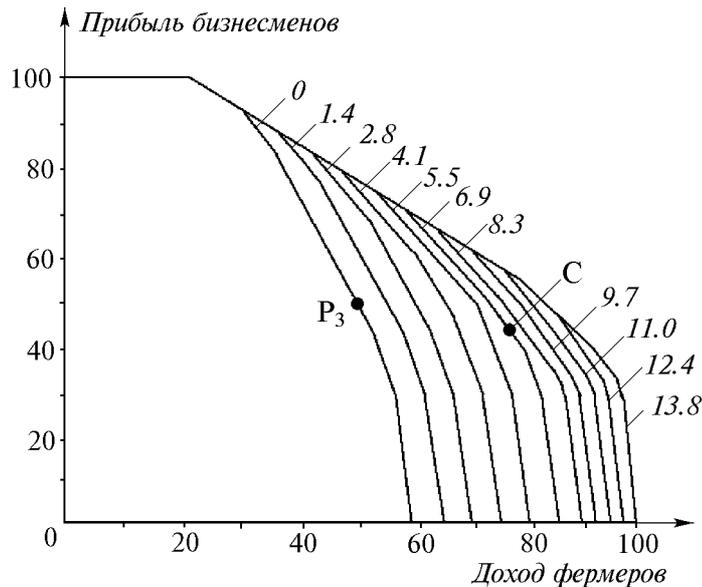


Рис. 3.2

том, как МДЦ может быть использован для поддержки собственно переговоров, рассматривается в гл. 4, где описывается система по переговорам, проводимых с использованием компьютерных сетей.

**Поддержка предварительного этапа переговоров.**

о-  
дилось изучать ОЭП в случае трех критериев. Напомним, что для этого требуется выделить два критерия, в координатах которых будут изображаться двумерные сечения ОЭП, а затем выбрать серию значений третьего критерия. После  
ний.

На рис. 3.2 в качестве координатных критериев выбраны чистый доход фермеров и прибыль рекреационного бизнеса. Значения тр критерия (дополнительной заболеваемости) принимают на недоминируе-

мом множестве значения от 0 до 13.8 чел. на 10 тыс. жителей. Диапазон а-гом в 1.38 чел. Желательно увеличение значений обоих критериев, отложенных на координатных осях, поэт “северо-восточные” границы этих сеч ний.

мости.

Его недоминируемая граница (кривая объективного замещ ния) состоит из трех частей (значения даны приближенно):

- почти линейной зависимости, отражающей постепенное пад прибыли рекреационного бизнеса от 100 до 60% с одно ростом чистых доходов фермеров от 20 до 80%;
- почти линейной, несколько более крутой зависимости, на к с 60 до 30% при росте до-меров с 80 до 95%;
- кривой резкого падения прибыли рекреационного бизнеса от 30% ров от 95 до 100%.

Таким образом, недоминируемая граница по своему характеру похо-жа на границы, рассмотренные ранее, только здесь она более гладкая (сказывается усложнение модели). Недоминируемая граница дает полную а-

ми (если не принимать во внимание интересы ж телей города). Учет ресов жителей выражается в переходе на другое сечение.

Следующее сечение ОЭП на рис. 3.2 соответствует заболеваемо более 12.4 чел. на 10 тыс. жителей. Его недоминируемая гран же форму, что и для заболеваемости не более 13.8 чел., только смещена в сторону меньших значений дохода. Заметим, что при доходах до 90% граница нового сечения совпадает со старым. Это означает, что в е-

–

несменов.

формы его недоминируемой границы. Интересно, что доход фермеров, жителей, сдвигается в сторону меньших значений, достигая при нулевой ваемости около 30%.

Рассмотрим минимальное сечение, соответствующее нулевой д л- . Его недоминируемую границу также можно разбить на три части:

- 100 до 90% с одновременным ростом чистых доходов ферм 20 до 30%,

90 до 30% с одновременным ростом чистых доходов фермеров от 30 до 55%,

30% до нуля с одновременным ростом чистых доходов фермеров до на несколько процентов.

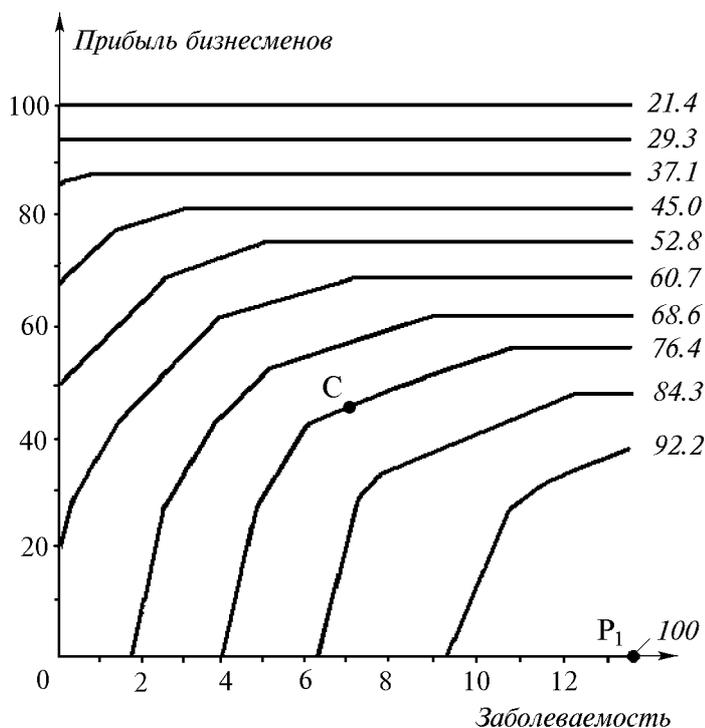


Рис. 3.3

показывает, что и горожане, и бизнесмены не за-  
 д-  
 ства, поэтому можно ожидать создания блока их предст вителей в Думе,  
 з-  
 витие интенсивного растениеводства. Это тем более вероятно, что горо-  
 т-  
 ского бизнеса. Положение представ  
 о-  
 вольно шатким, если они не найдут способа расколоть этот блок.

жан можно проанализировать, рассмотрев сечения ОЭП в др  
 и-  
 натах. На рис. 3.3 в качестве критериев, в координатах которых будут  
 изображаться сечения, выбраны прибыль рекреац  
 о-

-за загрязнения воды. Третий критерий –  
– принимает 11 значений в диапазоне от 21.4 до 100%.

ев,  
отложенного на горизонтальной оси, и уменьшение значения второго,  
отложенного на вертикальной оси, недоминируемыми границами  
сечений являются их “северо-западные” границы.

е-  
го критерия, т.е. минимальному чистому доходу фермеров, равному  
21.4%. Недоминируемая граница этого сечения состоит из одной точки –  
100% прибыли бизнесменов и нулевой заболеваемости. То же верно и для  
следующего сечения (чистый доход фермеров принимает значение  
29.3%), только в недоминируемой точке величина

– около 95%. Наличие единичных значений  
означает, что в данном диапазоне значений дохода нет противоречий  
нами.

Начиная с дохода фермеров в 37.1%, недоминируемая граница пред-  
ставлена уже кривой объективного замещения, т.е. возникает потенци-  
альный конфликт интересов бизнесменов и горожан. При дальнейшем  
снижении дохода фермеров

растет, т.е. диапазон  
интересов горожанами растет. При доходе фермеров в  
100% сечение состоит из единственной точки, соответствующей макси-  
мальному доходу бизнесменов. Заметим,

что в диапазоне от нуля до 60% максимального дохода фермеров нулевое  
значение заболеваемости принадлежит недоминируемой границе. Это  
означает, что фермеры могут заключить союз с горожанами, если заранее  
ограничат свои требования. Кроме того, у фермеров имеется возможность

–  
того, чтобы обсуждение началось с больших доходов фермеров (более  
45%). В то же время они не могут совместить требования интенсификации  
использования воды.

Рассмотрим теперь рис. 3.4, на котором ОЭП представлена с тр-  
– в качестве критериев, в координатах которых изображены  
сечения, выбраны заболеваемость из-за загрязнения воды фер-  
меров. Третий критерий (прибыль бизнесменов) принимает 11 значений в  
диапазоне от 0 до 100%. Поскольку желаемый

доход из критериев, отложенного на горизонтальной оси, и увеличение  
значения второго из критериев, отложенного на вертикальной оси, недоминируемые  
границами этих сечений являются “северо-западные” границы.

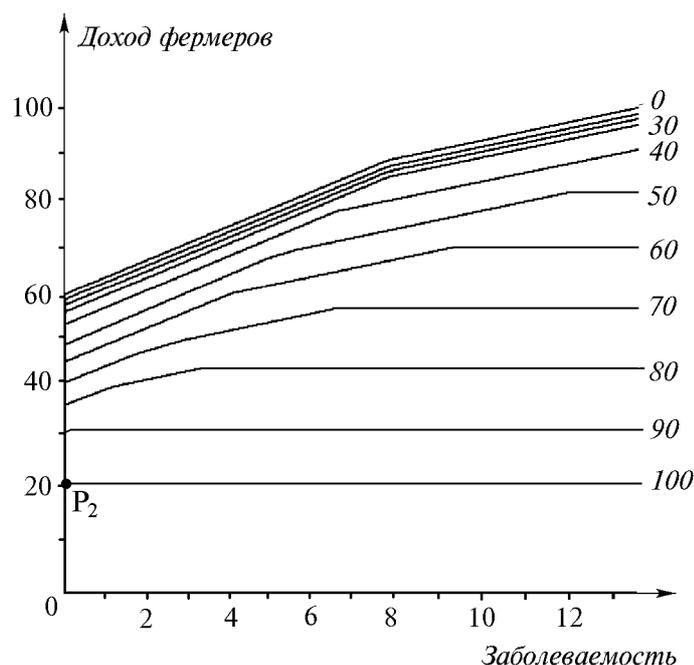


Рис. 3.4

Сразу обращает на себя внимание отличие рис. 3.4 от рис. 3.3: нулевая заболеваемость возможна при любой прибыли бизнесменов. Заметим также, что на рис. 3.3 горизонтальные линии соответствуют доходам фермеров, в то время как на рис. 3.4 – бизнесменов. Сечения, соответствующие малой прибыли бизнесменов, представляют собой наклонные линии. Это подтверждает наше наблюдение о том, что при условии малой прибыли фермеры чувствительны к риску во всем диапазоне. При прибыли более 50% от максимальной появляется зона нечувствительности, когда рост заболеваемости не приводит к падению доходов фермеров. При дальнейшем росте прибыли эта зона расширяется, занимая при максимальной прибыли практически весь диапазон. Это подчеркивает уже

– при большой прибыли нет опасности того, что фермеры станут нечувствительными к риску.

Заметим, что хотя все свойства конфликта (в том числе и множество разумных компромиссов) могли бы быть получены на основе рассмотрения только одной карты решений (скажем, рис. 3.2), на каждой из карт – то из свойств проявляется наиболее ярко. Анализ нескольких карт позволяет выявить наиболее значительные. В этом состоит

ми в случае трех критериев. Другое  
а-  
жение части карты. Это также м  
свойств ситуации (как это было в § 1.2). Преимущества ДКР особенно  
ях, когда число критериев больше трех (такие задачи  
ве).

– с-  
е-  
тавление недоминируемым точкам их прообразов, т.е. эффек-  
шений. Предположение о том, что рассматриваемые кр  
отражают интересы участников переговоров, – т-  
ракция. Так как само решение содержит значительно больше информа-  
ции, чем его сжатый образ в виде совокупности значений критериев, вы-  
е-  
тивных решений.

Вернемся к рис. 3.2. Буква  
точку на сечении, соответствующем заболеваемости 6.9 чел. на 10 тыс.  
населения. Этой точке  
критериев: доход фермеров – 76.8%, прибыль бизнесм – 44.3%. Если  
стижимой цели, то компью-  
щее решение, показывающее  
логиями, а также значения других  
показателей модели. Оно представлено в первой колонке табл. 3.

Как видно из таблицы, в верхней зоне используются четвертая и шес-  
тая технологии, а в нижней зоне еще и седьмая. Попуск воды через пло-  
составляет 5 куб.м в секунду. В верхней зоне четвертая технология  
занимает 25.5 тыс.га, а шестая технология – 4.5 тыс.га. В нижней зоне  
четвертая технология занимает 5.5 тыс.га, шестая те  
1.2 тыс.га, а седьмая технология – 3.3 тыс.га. Напомним, что четвертая и  
(120 куб.м воды на гектар) и отличаются относительно высокими затра-  
тами удобрений (40 и 80 кг в расчете на гектар). Седьмая технология  
потреблением воды, которое ока-  
не.

Полученное решение соответствует недоминируемой цели, кот  
была выбрана достаточно произвольно. Можно было бы ра  
решения, соответствующие и другим достижимым целям, скажем, отве-  
чающие интересам одной из сторон. Например, макс  
дохода фермеров (точка  $P_1$  на рис. 3.3) твует решение, представ-  
ленное во втором столбце таблицы. Сра  
выше. Прежде всего, попуск воды через плотину значительно увеличился.  
Далее, в верхней зоне значительную часть площади (8.9 тыс.га) стала  
занимать интенсивная (с относительно низким потреблением воды) вось-  
мая технология, а остальное – шестая. В нижней зоне площадь обрабаты-  
ваемом по седьмой технологии и немного по третьей.

Таблица 3

	1	2	3	4
	76.79	100.00	21.42	51.17
	44.30	0.00	99.95	51.18
	6.91	13.77	0.00	0.01
	5.00	5.95	4.50	5.04
<i>Верхняя зона:</i>				
	61.81	82.62	18.00	32.15
	2.06	2.75	0.60	1.07
	3.60	4.66	0.00	2.83
	1381.43	2754.00	0.00	0.99
дей:				
Технология 1	0.00	0.00	30.00	6.46
Технология 2	0.00	0.00	0.00	23.52
Технология 3	0.00	0.00	0.00	0.00
Технология 4	25.46	0.00	0.00	0.02
Технология 5	0.00	0.00	0.00	0.00
Технология 6	4.54	21.15	0.00	0.00
Технология 7	0.00	0.00	0.00	0.00
Технология 8	0.00	8.85	0.00	0.00
Технология 9	0.00	0.00	0.00	0.00
<i>Нижняя зона:</i>				
	24.48	29.76	6.07	25.36
	2.45	2.98	0.61	2.54
	1.60	2.40	0.00	1.74
	578.58	700.23	3.05	578.58
Технология 1	0.00	0.00	9.96	0.00
Технология 2	0.00	0.00	0.00	0.00
Технология 3	0.00	1.25	0.00	0.00
Технология 4	5.54	0.00	0.00	5.54
Технология 5	0.00	0.00	0.00	0.00
Технология 6	1.10	0.00	0.04	0.00
Технология 7	3.37	8.75	0.00	4.46
Технология 8	0.00	0.00	0.00	0.00
Технология 9	0.00	0.00	0.00	0.00

Может возникнуть вопрос, почему в этом решении не использована наиболее продуктивная, девятая технология? Ответ прост – и-чески не хватает воды. Поэтому в верхней зоне используется (насколько возможно) восьмая технология, а остальную площадь занимает относительно маловодная шестая технология. В нижней зоне приходится думать и о воде, и о загрязнении (ведь в точке н-тролируются!). Это приводит к и-технологии, в которой удобр не применяются вообще!

Давайте рассмотрим теперь достижимую цель, в наибольшей степени соответствующую интересам рекреационного бизнеса. Для этого на рис. 3.4 анализируем сечение с максимальной прибылью и выберем на  $P_2$  с нулевой заболеваемостью. Решение, соответствующее

выбранной достижимой цели, приведено в таблице в третьем столбце. Согласно нему, в верхней зоне используется ис-  
технология (орошение и химические удобрения не используются вовсе), а в  
нижней зоне, кроме первой технологии, также используется шестая, но на  
ди.

Теперь выберем достижимую цель, наиболее соответствующую инте-  
ресам жителей города. Рассмотрим на рис. 3.2 сечение с мин  
заболеваемостью. Обратите внимание на то, что в данном случае имеется

р-  
меров и прибылью рекреационного бизнеса. В  
этих показателей (точка  $P_3$ ), чтобы их вел чины были равны (скажем, и  
нов равны 51%). Со

решение приведено в четвертом столбце таблицы. В верхней зоне исполь-  
зуются первая, вторая и (совсем немного) четвертая технологии. В ж-

технологиями. Смысл этих решений ясен –  
допускается в верхней зоне. Впрочем, жители города могли бы согла-  
бой другой целью на рассмотренной кривой замещения. Это  
ваит дополнительные возможности для фермеров, которые стре-  
и горожан.

#### **Заключение.**

их проведения. Представим себе, что только одна из сторон имеет  
возможность использовать ДКР. Ясно, что она получит большие  
преимущества в проведении переговоров. Во-первых, эта сторона заранее  
будет знать, какие величины интересующих ее критериев достижимы, и  
поэтому будет ставить перед собой реальные цели. Во-вторых, эта  
ты и компромиссы.

Так, например, в рассматриваемом конфликте фермеры, выявив  
возможность противоречий между своими оппонентами, могут с успехом  
использовать эту информацию, если оппоненты будут ее лишены. Даже

противников, они были бы предупреждены о возможности возникновения  
блока горожан и бизнесменов, так что смогли бы заранее попытаться  
предотвратить его возникновение (например, договорившись с  
-  
вопросам)<sup>5</sup>.

---

<sup>5</sup>

обратившись по сети ИНТЕРНЕТ к WWW-серверу, адрес котор  
предисловии.

тельно,

## 1.4. Использование метода достижимых целей

Теперь, когда мы рассмотрели несколько примеров использования метода достижимых целей, сформулируем его концепцию в о-

е-

ния.

**Схема метода достижимых целей.** Итак, МДЦ дает возможность о-  
стей (кривых объективного замещения) между недоминируе-  
таниями значений критериев, используемых для е-  
ния. Основными шагами МДЦ являются:

- 1) построение множества достижимых целей (или его ОЭП) в про-  
ев,
- 2) различными парами критериев,
- 3) выбор компромиссной достижимой цели,
- 4) расчет решения, приводящего к выбранной цели.

Упрощенная схема МДЦ была приведена на рис. 1.7. Более д-  
схема, иллюстрирующая четыре описанных шага, изображена на рис. 4.1.  
ми, внутри которых  
с номером шага указан его исполнитель: компьютер (К) или чело-  
– лицо, принимающее решение (ЛПР). Около стрелок указан резуль-  
тат этапа.

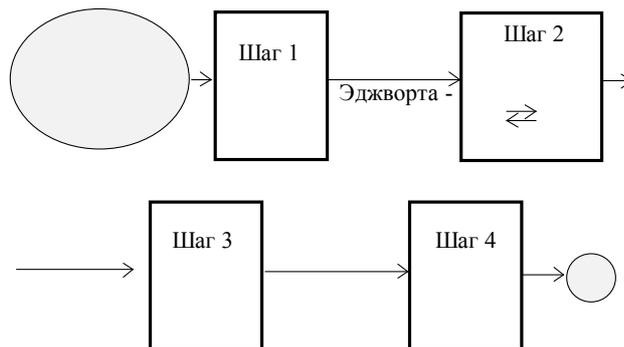


Рис. 4.1

Первый шаг выполняется автоматически, без участия человека, по-  
л-  
горитмов. Второй шаг является существенно интерактивным (чело-  
-  
машинным), и поэтому на нем выдвигаются жесткие тр б-  
ству и скорости получения изображения. Этот этап обычно реализуется  
кой станции. Выбор цели

ях или переговорах, а расчет  
ки.

и-  
меров, в которых задача построения множества достижимых целей могла  
с-  
тимых решений, рассчитывались значения критериев в этих вершинах, а  
–  
достижимых целей. Та  
о-  
стейших задачах, поскольку число вершин даже в относительно простых  
гих тысяч, а в моделях, используемых на  
нов и даже миллиардов. Поэтому ранее мы не  
тоды, с помощью которых удалось построить ОЭП и  
изобразить ее в виде различных карт решений. Таким же образом мы  
пать и в трех следующих главах нашей книги. Методы по-

е в последней, пятой главе. Теперь сделаем несколько замечаний для  
того, чтобы читатель мог осознать сложности, возникающие при по-  
строении множеств достижимых целей и их ОЭП.

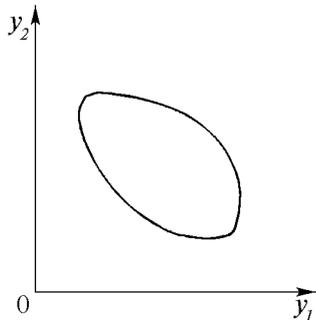


Рис. 4.2

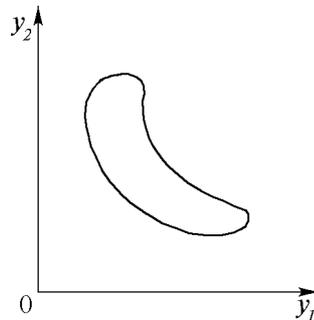


Рис. 4.3

#### Множества достижимых целей и их построение.

т-  
метим, что множество достижимых целей является многогранным для  
линейной модели. Если же модель включает нелинейные зависи-  
мости, то  
ную структуру. В  
мя, встречаются нелинейные модели, для которых множество  
о-  
жество. Ограниченность мно-  
жества достижимых целей естественна в большинстве задач, а под вы-  
–  
жество целиком содержит отрезок, их  
соединяющий.

На рис. 4.2 приведен пример выпуклого множества, не являющ  
многогранником. На рис. 4.3 приведен пример невыпуклог  
ства.

лого многогранника (см. рис 4.4). Более того, множество до  
 целей для сложной линейной модели, которое с самого начала является  
 многогранником с большим числом вершин, разу  
 ком.

е-  
 к-  
 е-  
 – прямоугольников, шаров и т.д. (см.  
 рис. 4.5). В большинстве задач, которые будут рассмотрены в дальней-  
 шем, множества достижимых целей выпуклы, так что их можно аппрок-  
 жать в виде, рассмот-  
 ренном ранее. В тех же случаях, когда встретя  
 достижимых целей, методы их визуализ  
 а-  
 лиза конкретных задач. Сразу тим, что в обоих случаях визуализация  
 на достаточно быстро, что и обеспечивает инте-  
 дур анализа множеств достижимых целей. Подчеркнем  
 еще раз, что в данной книге мы приводим черно-

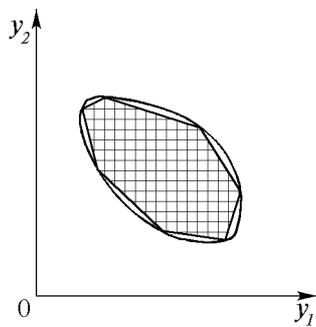


Рис. 4.4

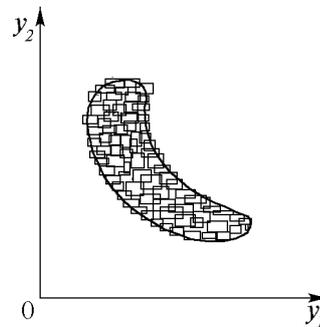


Рис. 4.5

экрана компьютера, так что в реальности изображаемые карты решений  
 куда более красивы и наглядны, чем рисунки, данные в книге.

В примерах, рассмотренных в данной главе, число критериев не пре-  
 вышало трех. Мы видели, как тяжело дался переход от двух кр  
 трем. В связи с этим можно ожидать резкого  
 переходе к случаю четырех, пяти, шести и т.д. крит риев. На самом деле,  
 зации, анализ множеств  
 можно сделать достаточно простым для пользователя. Как легко дога-  
 даться, наиболее просто могут быть представлены совокупности сечений  
 ОЭП. Мы не станем здесь у лубляться в эти проблемы, а просто проде-

следующей главе, целиком посвященной приложениям МДЦ к экологическим.

вычислительных машинах. При этом существенную роль играют модели с несколькими тысячами переменных. В то же время, вчисляться несколькими (не более десяти) управляющими параметрами. иза:

- исходных моделей изучаемых систем, если эти модели линейны,
- исходных моделей изучаемых систем, если это достаточно простые нелинейные модели,
- упрощенных (линейных и нелинейных) моделей, которые, тем не менее, позволяют получить общее (целостное) представл

а-тегии.

**целей.** Поскольку метод аппроксимации системами кубов, использ

достижимых целей, может применяться лишь тогда, когда совокупность

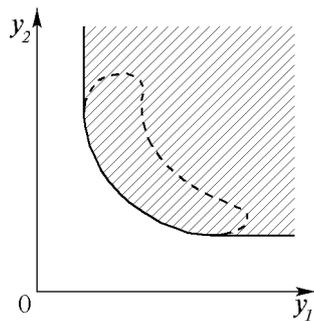


Рис. 4.6

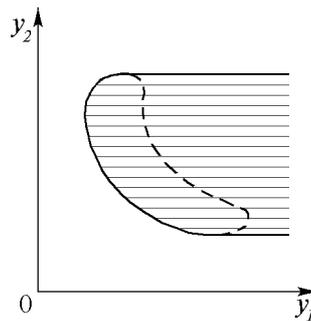


Рис. 4.7

решений описывается небольшим числом параметров, то желательно к-лым множеством достижимых целей или его ОЭП.

Один из приемов такого рода связан с построением ОЭП. Пусть в некоторой задаче, ОЭП для которой приведена на рис. 4.3, заранее ясно, что териев  $y_1$  и  $y_2$ .

Тогда ОЭП этого множества будет иметь вид, приведенный на рис. 4.6, т.е. будет выпуклой. Таким образом, за счет п

а-

чу с выпуклой ОЭП, которая может быть аппроксимирована многогран-  
 менных.

Предположим теперь, что мы заведомо знаем, что значение  $y_1$  уменьшать, но относительно  $y_2$  такой информации нет. То с-  
 смотреть множество, изображенное на рис. 4.7. Это множество содержит, лей, все такие точки про-  
 странства критериев, для которых найдется хотя бы одна более предпоч-  
 $y_1$ . Это множество также оказалось выпуклым. Таким образом, такое расширение множества к-  
 симации. Множества, аналогичные изображенному на рис. 4.7, в которых к множествам достижимых целей присоединены точки, доминируемые части критериев, будем называть ча д-  
 -Парето (ЧОЭП).

Заметим, что использование ЧОЭП вместо ОЭП может быть в не только тем, что не известно направление улучшения как -  
 показателей, но и просто из- о-  
 жества достижимых целей, пусть даже доминиру мую. Такое желание вполне естественно если, конечно, это не мешает исследованию (не вызы-  
 вает пересечения границ и т.д.). Примеры использования ЧОЭП приве-  
 щих главах.

ход,  
 пригодный в тех случаях, когда ОЭП ока-  
 зывается невыпуклой. В таком случае

ОЭП, которая называется выпуклой обо-  
 -Парето (ВОЭП). Это

выпуклая ОЭП. Пользователь получает  
 вление о связи между критериями,  
 но в "усредненном" виде. Выбрав цель на  
 ВОЭП, он выражает тем самым свое  
 предпочтение. Эта цель (изображенная на  
 рис. 4.8 точкой), конечно же, не об а-  
 тельно достижима, но она близка к ОЭП и потому достаточно разумна.  
 Далее, нах

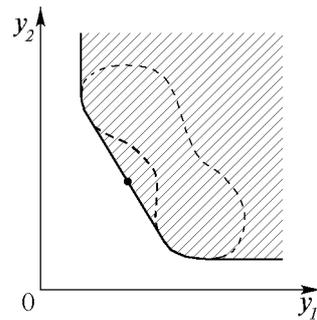


Рис. 4.8

ний критериев,  
 ной цели, а также и  
 шения, их реализующие. Пользователь должен сам выбрать еди н-  
 шение из малого их числа, что, конечно же, является более простой  
 чей, чем анализ исходной проблемы. Б лее того, некоторые из полу-

фективных решений (или даже все) могут стать предметом

6

блем.

е-

**ских проблем.** Прежде всего необходимо договориться о том, что мы  
дем иметь в виду под экологическими проблемами. Под ними будут

е-

дой. Мы будем изучать их определенный аспект –  
стратегий взаимодействия с окружающей средой. Такие проблемы рас-  
сматриваются науками, в англоязычных странах н мися envi-  
ronmental sciences. В русском языке иногда встр чается такой термин, как  
“теория рационального природопользов ния”, но в силу своей явной не-  
нения не получил. Вместо него ис-  
пользуют термин “экологический”, хотя к науке экологии, занимающейся  
о-  
бой и с окружающей их средой, методы поиска разумных стратегий непо-  
ношения не имеют.

Мы будем также говорить, что изучаем “экологи- о-  
лемы” для того, чтобы подчеркнуть, что в рассматриваемых нами про-  
рственными,  
транспортными, коммунальными и другими подобными системами, свя-  
занными с экономической деятельностью. Более того, сами “эко -  
гические” проблемы являются, по существу, экономиче кими, поскольку  
могли бы быть решены при наличии достаточных средств. Поэтому во-  
прос о построении стратегий, позволяющих за счет ограниченных средств  
решить наиболее острые экологические проблемы, являет н-  
ческой задачей.

результаты изучения процессов различной природы (экономических,  
социальных, физических, биологических и т.д.). Требуется построить их  
упрощенную интегрированную модель. И  
быть упрощенной потому, что пра

матические модели, адекватно описывающие  
процессы различной природы. Такие модели обычно разрабатываются  
ями из различных областей науки, которым трудно найти  
общий язык. Кроме того, может оказаться, что для части подсистем изу-

ы-

ми оценками. Методика целостного рассмотрения сложных систем долж-  
ности.

---

<sup>6</sup> Некоторые аспекты этого метода, получившего название метода разумных це-  
лей, обсуждаются в [4].

гических проблем (ее подробное описание дано в гл. 4). На строения упрощенных описаний подсистем. Такие описания можно найти на основе параметризации этих подсистем, т.е. на упрощенных зависимостях, связывающих выходы подсистем с их входами, а также области применимости этих зависимостей. Упрощенные описания элементов с исходными моделями подсистем. В том случае, когда модели подсистем отсутствуют, можно сделать следующие оценки.

Далее, упрощенные описания подсистем и ограничения на их входы, используются в имитационной модели, для анализа которой предлагается применять МДЦ. В решении экологических проблем. Хотя эти стратегии будут получены с использованием упрощенных моделей, их можно будет уточнить в имитационных экспериментах, проводимых в том же направлении. Как уже говорилось, в рамках имитационных экспериментов используются различные стратегии, причем недостатком имитации является отсутствие способов формирования разумных, согласованных стратегий. Методика целостного рассмотрения, основанная на использовании МДЦ, позволяет сформулировать такие стратегии, дополняя тем самым имитационный эксперимент.

#### **Опыт использования МДЦ.**

Опыт использования МДЦ в экономике в семидесятых годах. В то время существовала проблема экологического диалога, в связи с чем множества достигнутых результатов, содержащих рисунки, изображающие множества достижимых целей. Рассматривались различные экономические модели. Вершиной этих исследований было участие СССР. Данный опыт описан в § 3.2 и § 3.3.

стратегий решения экологических проблем: локальных, региональных, межстрановых и глобальных. Опыт этих исследований описан в гл. 2. В начале девяностых годов, когда возник интерес к проблемам регулирования рыночной экономики, были разработаны методы использования МДЦ (см. § 3.4 и § 3.5).

экономических и экологических проблемах. Есть, однако, и другие важ-

ные области применения МДЦ. Одна из них – и-  
о-  
вания. Этот вопрос затронут в § 4.3. Другая важная область применения  
— анализ задач бизнеса, в том числе ра  
фирм, финансовое планирование и т.д., не нашел отражения в данной  
-за ограниченности ее объема.

р-  
о больших баз данных, в том числе для извлечения из них малого  
числа наиболее интересных записей. Для этого был ра б-  
ный метод, родственный МДЦ и названный мет дом разумных целей,  
кратко охарактеризованный выше. Этот метод позволяет изучать базы  
данных любой природы, так что он может быть использован для изучения  
весьма широкого класса задач, св занных с анализом экономической,  
финансовой, маркетинговой, медицинской, технической и другой инфор-  
мации. В частности, нами были рассмотрены такие раз а-  
чи, как торговля дом ми, покупка компьютера, выбор варианта прямых  
инвестиций или портфеля акций, постановка медицинского диагноза,  
ки передач для вертолета и т.д. Все это также осталось за  
пределами книги, в которой авторы ограничились применением МДЦ в  
мах.