ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2000, № 4, с. 13–18

УПРАВЛЕНИЕ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ И В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

УДК 62.50

СИНГУЛЯРНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ С НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ АНИЗОТРОПНОЙ ДИФФУЗИИ*

Д. В. Ковков, В. И. Цурков

Москва, ВЦ РАН

Поступила в редакцию 19.11.99 г.

Для уравнений анизотропной диффузии, которые используются при обработке изображений, найден класс функций существования слабого решения задачи Коши в виде Гёльдер-непрерывных функций. Результаты численных расчетов показывают одновременное сохранение бесконечных градиентов (кромок) и подавление шумов.

Введение. В [1] П. Перона и Дж. Малик предложили использовать дифференциальные уравнения в частных производных типа диффузии для обработки двумерных изображений, где благодаря параболической специфике имеет место подавление шумов, а ввиду стремления коэффициента диффузии к нулю для бесконечных градиентов одновременно сохраняются кромки. В [2] в отличие от [1] берется недивергентная форма уравнений, чтобы избежать неустойчивости по Адамару задачи с начальными условиями, и вводится некоторая приближенная модель с малым параметром. В [3] найдены автомодельные решения одномерных уравнений для рассматриваемого вырождения. Полученные сингулярные решения с особенностью гёльдеровского типа определяют модель сохранения кромки во времени.

В данной работе рассматривается задача Коши для уравнений указанного класса. Найден класс функций, в котором существуют слабые решения. Это уже упомянутые Гёльдер-непрерывные функции. Доказательство основано на получении внутренних априорных оценок для констант Липшица для некоторых преобразованных исходных переменных. Проведены численные расчеты, где в начальный момент времени на функции с сингулярностью гёльдеровского типа накладываются функции различных шумов. Получено, что сингулярность сохраняется во времени, а шумы исчезают. Это решает проблему Пероны – Малика об одновременном подавлении шумов и сохранении кромок, где под кромкой понимается сингулярная функция гёльдеровского типа. Эти результаты показывают, что рассмотрение приближенной модели со сверткой [2] и малым параметром уже заранее, приводят к сглаживанию таких сингулярностей (т.е. кромок).

1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение в частных производных параболического типа с одной пространственной переменной

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1.1}$$

где коэффициент диффузии является положительным и зависит от производной решения, он стремится к нулю, когда производная становится неограниченной, т.е. $k\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \longrightarrow \infty$ при $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \longrightarrow \infty$.

В связи с (1.1) рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{(u_x)^m}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1.2}$$

где при $m > 0$ коэффициент теплопроводности удовлетворяет указанному свойству. В [3] найдены автомодельные решения для (1.2) при указанном вырождении. Здесь

$$u(t, x) = u(\xi), \quad \xi = (t+1)^{\alpha}x,$$

при этом для $m > 2$, $\alpha = \frac{1}{m-2}$ получена следующая аналитическая формула:

$$u'(\xi) = \left(\frac{1}{\alpha m}\right)^{\frac{1}{m}}\left(\frac{2}{\alpha m}(u'(0))^{-m} - \xi^2\right)^{-\frac{1}{m}},$$

из которой следует сингулярность гёльдеровского типа для автомодельного решения уравнения (1.2). Эта сингулярность сохраняется во времени в силу автомодельных решений и дает *аналитическую модель сохранения кромки* [3].

Введем обозначение $C^2 = \frac{2}{\alpha m}(u'(0))^{-m}$. Интегрируем разложение

$$(C^2 - \xi^2)^{-\frac{1}{m}} = (2C)^{-\frac{1}{m}}(C-\xi)^{-\frac{1}{m}} +$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 99-01-01066).

$$+\frac{(2C)^{-\frac{1}{m}}}{2mC}(C-\xi)^{1-\frac{1}{m}}+O\left((C-\xi)^{2-\frac{1}{m}}\right)$$

в окрестности точки $\xi = C$. Отсюда следует, что вблизи точки $\xi = C$ имеет место разложение по степеням $(C-\xi)$

$$u(\xi) = B+(\alpha mC)^{-\frac{1}{m}}\frac{m}{m-1}(C-\xi)^{1-\frac{1}{m}}+$$

$$+\frac{(\alpha mC)^{-\frac{1}{m}}}{2mC}\frac{m}{m-2}(C-\xi)^{2-\frac{1}{m}}+O\left((C-\xi)^{3-\frac{1}{m}}\right).$$

Далее будет установлено, что и задача Коши для (1.2) имеет класс существования решения в виде Гёльдер-непрерывных функций. Здесь имеется полная аналогия с уравнением медленной диффузии. Найденные сингулярные температурные волны в [4, 5] указали на класс функций, в котором существует обобщенное решение соответствующих задач с начальными условиями [6]. Хотя, конечно, результаты не переносятся автоматически, так как уравнения нелинейной диффузии с коэффициентом, зависящим от градиента, имеют свои специфические свойства.

2. Априорные оценки. Изучим свойства решения задачи Коши для уравнения (1.2). Для нас важную роль будет иметь так называемая *потенциальная функция* V, которая вводится следующим образом:

$$u = V|V|^{-\frac{1}{m}}+\bar{u}_0, \qquad (2.1)$$

здесь x_0 – точка сингулярности для начальных данных и $\bar{u}_0 = u(x_0)$. Для возрастающих функций из Гёльдер-непрерывного класса с показателем $\frac{m-1}{m}$ функция V является регулярной в окрестности точки x_0. Она монотонно возрастает и равна нулю в точке x_0. Для упомянутой выше модели кромки потенциальная функция является Липшиц-непрерывной.

Из (1.2) и (2.1) получим, что потенциальная функция V удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{V\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}-\frac{1}{m}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^m}. \qquad (2.2)$$

По методу [6] далее будут получены внутренние априорные оценки для производной потенциальной функции в задаче с начальными условиями. Рассматриваем классическое решение уравнения (2.2) в прямоугольнике $R = (a, b)\times(0, T]$. Введем обозначения

$$\bar{R} = (a_1, b_1)\times(0, T]\subset R, \quad M = \max_{\bar{R}}|V|,$$

$$M_1 = \max_{[a,\,b]}|V_x(x, 0)|.$$

Т е о р е м а 1. Пусть V – классическое решение (2.2) в $\bar{R}$, а $M_1 < \infty$. Тогда в $\bar{R}*$ имеет место неравенство $|V_x(x, t)| \le C$, где зависит только от m, M, $a_1 - a$, $b - b_1$, M_1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сделаем гладкую замену переменной $V = \varphi(w)$. Вид конкретной функции φ укажем позже. Эта функция должна удовлетворять условию взаимно однозначного соответствия, т.е. $\varphi'(w) > 0$. Функция w удовлетворяет уравнению

$$w_t = \frac{w_x^2\left(\varphi\frac{\varphi''}{\varphi'}-\frac{1}{m}\varphi'\right)+\varphi w_{xx}}{(\varphi')^m(w_x)^m}.$$

Продифференцируем обе части этого уравнения по x. Имеем уравнение

$$p_t = \left(-(m-2)\frac{p_x}{p^{m-1}}\frac{\left(\varphi\frac{\varphi''}{\varphi'}-\frac{1}{m}\varphi'\right)}{(\varphi')^m}+\right.$$

$$+\frac{p}{p^{m-2}}\left(\frac{\varphi''+\varphi\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)'-\frac{1}{m}\varphi''}{(\varphi')^m}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{(-m\varphi'')\left(\varphi\frac{\varphi''}{\varphi'}-\frac{1}{m}\varphi'\right)}{(\varphi')^{m+1}}\right)\right)+$$

$$+\left(\left(\frac{p_{xx}}{p^m}-m\frac{p_x^2}{p^{m+1}}\right)\frac{\varphi}{(\varphi')^m}+\frac{p_x p}{p^m}\left(\frac{\varphi'}{(\varphi')^m}-m\frac{\varphi''\varphi}{(\varphi')^{m+1}}\right)\right),$$

где введено обозначение $p = w_x$. После преобразований умножим это уравнение на p и перенесем члены, содержащие p_t и p_{xx} налево, а остальные слагаемые оставим справа. Получаем следующее соотношение:

$$1/2(2pp_t)-\frac{\varphi p p_{xx}}{(\varphi' p)^m} =$$

$$= \frac{1}{(\varphi' p)^m}\left[2(1-m)p^2 p_x\left(\varphi\frac{\varphi''}{\varphi'}-\frac{1}{m}\varphi'\right)+\right. \qquad (2.3)$$

$$+\,p^4\left(\varphi''\left(2-\frac{1}{m}\right)+\varphi\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)'-m\varphi\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^2\right)-mp_x^2\varphi\Bigg].$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$z(x,t) = (\zeta(x)p(x,t))^2, \qquad (2.4)$$

где $\zeta(x)$ – гладкая функция класса $C^2[a, b]$ и $\zeta = 0$ в окрестностях точек $x = a$, $x = b$; $\zeta = 1$ на $[a_1, b_1]$, $0 \le \zeta \le 1$. Функция (2.4) принимает максимальное на $\bar{R}$ значение либо при $t = 0$, либо на $\bar{R}^*$. В последнем случае в точке максимума (x_0, t_0) выполняются неравенства

$$z_x = 2\zeta^2 pp_x + 2\zeta\zeta_x p^2 = 0 \qquad (2.5)$$

и $z_{xx} \le 0$, $z_t \ge 0$. (Если максимум достигается при $t = T$, то $z_t \ge 0$. Если же наибольшее значение достигается во внутренних точках R^*, то $z_t = 0$.)

В любом случае в точке (x_0, t_0) имеет место неравенство

$$z_t - \frac{\varphi z_{xx}}{(\varphi' p)^m} \ge 0.$$

Подставляя сюда (2.4), получим

$$2\zeta^2 pp_t - \frac{2\varphi}{(\varphi' p)^m}[\zeta\zeta_{xx}p^2 + \zeta_x^2 p^2 + \\ + \zeta^2 p_x^2 + \zeta^2 pp_{xx} + 4\zeta\zeta_x pp_x] \ge 0. \qquad (2.6)$$

Поскольку $|4\zeta\zeta_x pp_x| \le \zeta^2 p_x^2 + 4\zeta_x^2 p^2$ (неравенство Коши–Шварца), то, подставляя это неравенство в (2.6) и учитывая (2.5), получим

$$\zeta^2\left(pp_t - \frac{\varphi pp_{xx}}{(\varphi' p)^m}\right) \ge \frac{\varphi p^2}{(\varphi' p)^m}(\zeta\zeta_{xx} - 3\zeta_x^2).$$

Из (2.3) и (2.5)

$$\varphi p^2(\zeta\zeta_{xx} - 3\zeta_x^2) \le 2(1-m)p^3\zeta\zeta_x\left(\varphi\frac{\varphi''}{\varphi'} - \frac{1}{m}\varphi'\right) +$$

$$+\,\zeta^2 p^4\left(\varphi''\left(2-\frac{1}{m}\right)+\varphi\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)'-m\varphi\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^2\right)-m\zeta_x^2 p^2\varphi.$$

Запишем это в виде

$$-\zeta^2 p^4\left(\varphi''\left(2-\frac{1}{m}\right)+\varphi\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)'-m\varphi\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^2\right) \le$$

$$\le 2(1-m)p^3\zeta\zeta_x\left(\varphi\frac{\varphi''}{\varphi'} - \frac{1}{m}\varphi'\right) - \qquad (2.7)$$

$$-\,\varphi p^2(\zeta\zeta_{xx} + (m-3)\zeta_x^2).$$

Выберем теперь функцию φ так, чтобы в левой части множитель в скобках был строго отрицательным:

$$\varphi''\left(2-\frac{1}{m}\right)+\varphi\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)'-m\varphi\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^2 \le \delta < 0.$$

Этому условию, а также условиям гладкости, монотонности и ограниченности удовлетворяет, например, функция $\varphi(x) = e^{\frac{x}{M}}$ при

$$|x| \le M, \quad 0 < e^{-1} \le \varphi(x) \le e,$$

$$0 < Me^{-1} \le \varphi'(x) \le Me, \quad \frac{\varphi''(x)}{\varphi'(x)} \equiv M.$$

Указанный множитель равен

$$M^2\varphi\left(2 - \frac{1}{m} - m\right) \le -M^2e^{-1} < 0.$$

Следовательно, коэффициент при ζ^2p^4 в неравенстве (2.7) строго положительный. Поэтому из (2.7) вытекает, что в точке (x_0, t_0) справедливо неравенство

$$2\zeta^2p^4 \le C_1p^2 + \zeta C_2|p|^3, \qquad (2.8)$$

где константы C_1 и C_2 зависят лишь от $a_1 - a$, $b - b_1$, M, m. Учитывая, что $\zeta C_2|p|^3 \le \zeta^2p^4 + \frac{C_2^2}{4}p^2$, получим из (2.8)

$$z = \zeta^2p^2 \le C_1 + \frac{C_2^2}{4} = C_3.$$

Принимая во внимание, что наибольшее значение z может достигать и на границе (при $t = 0$), имеем

$$z(x,t) \le \max_{\bar{R}} z(x,t) \le \max\{C_3, M_1\} = C_4.$$

Следовательно,

$$\max_{\bar{R}^*}|w_x| \le C_4^{1/2}.$$

А поскольку $V_x = \varphi'(w)w_x$ и $\varphi' \le Me$, то получаем

$$\max_{\bar{R}^*}|V_x| \le MeC_4^{1/2} = C.$$

Из теоремы следует, что если начальные данные для уравнения (1.2) принадлежат к классу Гёльдер-непрерывных функций с показателем $1 - \frac{1}{m}$, то и в последующие моменты времени особенность этого типа будет сохраняться.

Под решением уравнения (1.2) в слабом смысле в прямоугольнике $R = [a, b] \times [0, T]$ понимается непрерывная функция $u(x, t)$, такая, что функции

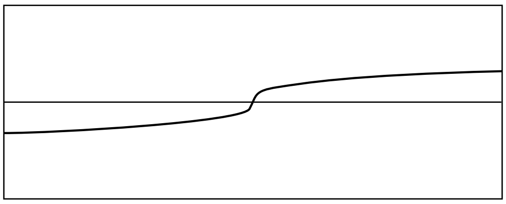

Рис. 1. Стандартная кромка.

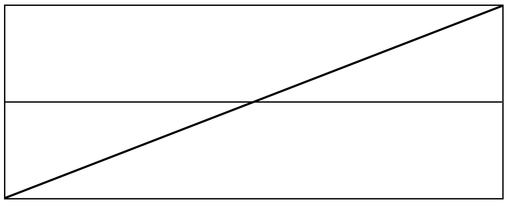

Рис. 2. Потенциальная функция стандартной кромки.

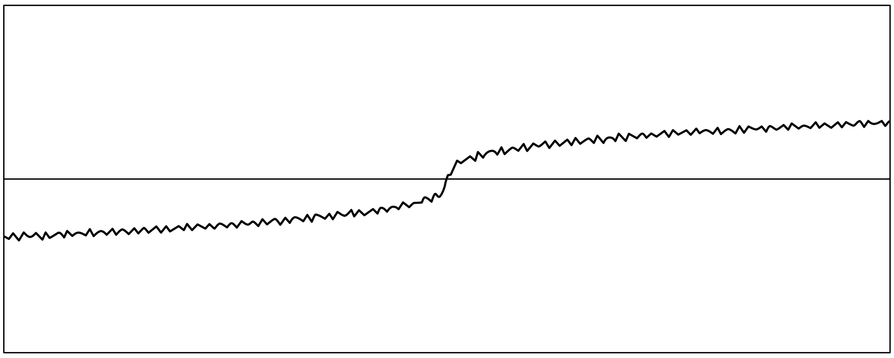

Рис. 3. Стандартная кромка с наложением синусоидального шума.

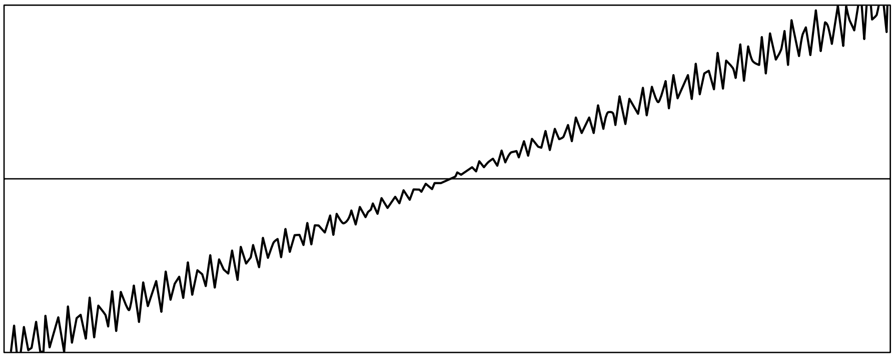

Рис. 4. Потенциальная функция кромки с синусоидальным шумом (рис. 3).

u и $\dfrac{1}{(u_x)^{m-1}}$ являются непрерывными на R и для любой функции $\eta \in C^1(R)$, $\eta|_{\partial R} = 0$ выполняется интегральное соотношение

$$\iint\limits_R \left[u\eta_t + \frac{1}{m-1}\frac{\eta_x}{(u_x)^{m-1}}\right]dxdt = 0.$$

По аналогии с [6] можно установить, что в случае решений, имеющих одну точку сингулярности, справедливо существование слабого решения задачи Коши для уравнения (1.2) с начальными данными в классе Гёльдер-непрерывных функций. Можно установить, что в тех точках, где $u_x \neq \infty$, обобщенное решение является решением и в сильном смысле.

3. Одновременное сохранение бесконечных градиентов и подавление шумов. Был проведен ряд численных расчетов, в которых решалось уравнение (1.2) с начальными данными в виде сингулярной функции, на которую накладывались шумы различных видов. При вычислениях использовалась неявная схема для уравнений параболического типа, где коэффициент диффузии брался с текущего слоя: на j-м шаге решение определяется системой уравнений

$$u_i^{j+1} - u_i^j = \frac{\tau}{h^2}\frac{1}{\left|\dfrac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2h}\right|^m}(u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1})$$

с граничными условиями. Здесь τ и h – шаги по времени и пространству (можно задавать их про-

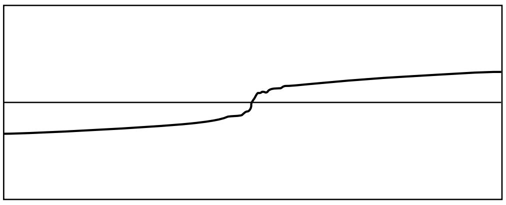

Рис. 5. Решение уравнения (1.2) с начальными данными на рис. 3, 4 после 90 итераций.

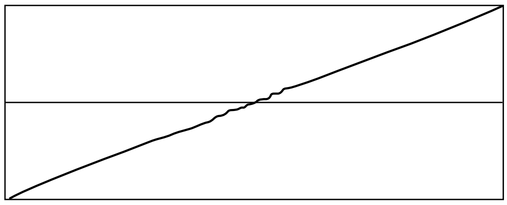

Рис. 6. Потенциальная функция решения, изображенного на рис. 5.

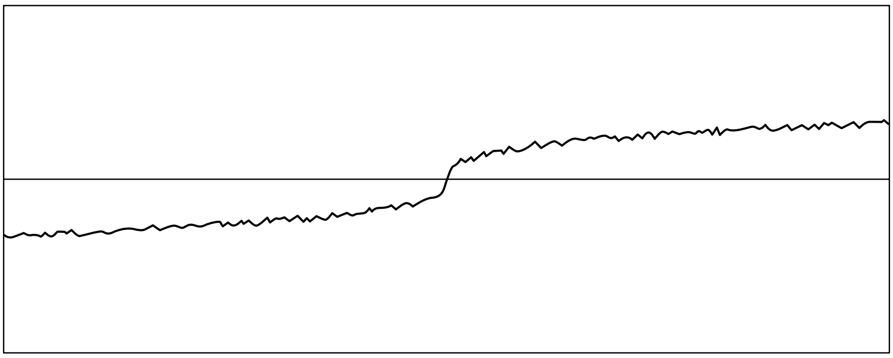

Рис. 7. Стандартная кромка с наложением случайного шума.

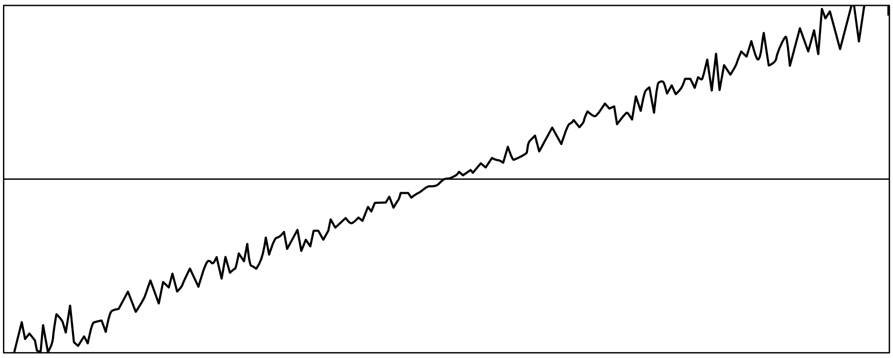

Рис. 8. Потенциальная функция кромки со случайным шумом (рис. 7).

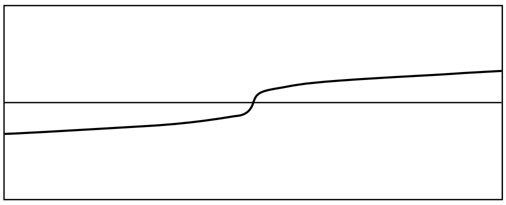

Рис. 9. Решение уравнения (1.2) с начальными данными на рис. 7, 8 после 90 итераций.

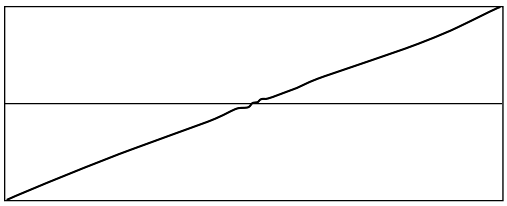

Рис. 10. Потенциальная функция решения, изображенного на рис. 9.

извольными). Решая на каждом шаге полученную трехдиагональную систему уравнений, получаем значения, которые выводятся на печать. В последующих примерах берется $m = 3$, шаги выбраны равными соответственно $\tau = 0.0001$ и $h = 0.01$. На графиках представлены сами решения u и его потенциальные функции.

На рис. 1 и 2 изображена стандартная кромка

$$u_0(x) = \begin{cases} x|x|^{-\frac{1}{m}} \text{ при } |x| \neq 0 \\ 0 \text{ при } x = 0, \end{cases}$$

и ее потенциальная функция соответственно. На кромку накладывается синусоидальное возмущение (шум). Соответствующие функции u и V изображены на рис. 3 и 4.

На рис. 5 и 6 представлено решение уравнения (1.2) для u и V соответственно после 90 итераций. Затем то же самое проделывается для случайного шума (см. рис. 7–10). Полученные графики показывают одновременное подавление шумов с сохранением бесконечных градиентов (кромок), что решает проблему Пероны–Малика.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Perona P., Malik J.* Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion // IEEE Trans. On Pattern Anal. and Mach Intel. 1990. V. 12. № 7.
2. *Alvarez L., Lions P.-L., Morel J.-M.* Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion. II // SIAM J. Numer. Anal. 1992. V. 29. № 3.
3. *Цурков В.И.* Аналитическая модель сохранения кромки при подавлении шумов посредством анизотропной диффузии // Изв. РАН. ТиСУ. 2000. № 3.
4. *Зельдович Я.Б., Компаниец А.С.* К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры // Сборник посвященный семидесятилению акад. А.Ф. Иоффе. М.: Изд-во АН СССР, 1950.
5. *Баренблатт Г.И.* О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде // ПММ. 1952. Т. 16. Вып. 1.
6. *Aronson D.G.* Regularity properties of flows tghough porous media // SIAM J. Appl. Math. 1969. V. 17. № 2 (March).