тва сразу в обеих отраслях. Однако не следует забывать, что речь идет не об отдельных предприятиях, а о целых отраслях, и, кроме того, в действительности технологические цепочки гораздо длиннее, а поэтому у экономических агентов нет полной информации о намерениях партнеров, возникает взаимное недоверие друг к другу и обоюдная недальновидность, что делает согласованное взаимовыгодное отклонение от равновесия неустойчивым.

Второй вариант модели ближе к описанию рыночных взаимоотношений между агентами. Подобно классической модели изолированного рынка, он описывает взаимодействие пары производитель – потребитель. На рис. 3 изображены кривые спроса и предложения в координатах обратное качество – выпуск. Теорема 3 утверждает, что равновесием является точка пересечения этих кривых. Действительно, если производитель снижает качество продукта, то спрос на него падает, предложение превышает спрос, при этом доход обеих отраслей меньше, чем в равновесии. Если же качество выше равновесного, то образуется избыточный спрос, у потребителя продукта появляются свободные трудовые ресурсы, которые он не может задействовать из-за недостатка сырья. Другими словами, равновесие по Нэшу в модели (10)-(16) во многом аналогично равновесию на свободном рынке с совершенной конкуренцией.

Авторы выражают благодарность А.А. Петрову, за полезные замечания и постоянное внимание к работе, а также Г.К. Каменеву и Д.Л. Кондратьеву, создавшим компьютерную систему, позволяющую исследовать нелинейные отображения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

*Крутов А.П., Петров А.А., Поспелов И.Г.* Системный анализ развивающейся экономики : модель общественного воспроизводства в плановой экономике. // Математическое моделирование : Модели и методы исследования сложных систем. – М.:Наука, 1989, с. 200-231.
*Петров А.А., Поспелов И.Г.* Системный анализ развивающейся экономики : к теории производственных функций.1. // Изв.АН СССР, Техническая кибернетика, 1979, № 2, с. 18-27.
*Гермейер Ю.Б.* Игры с непротиворечивыми интересами. – М.:Наука, 1976, с. 93.

Поступила в редакцию
14.05.92.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ

том 4 номер 5 год 1992

*МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ*

# УРОВЕНЬ КАЧЕСТВА ПРОДУКЦИИ КАК ЭКОНОМИЧЕСКИЙ РЕГУЛЯТОР

© *С.М. Гуриев, И.Г. Поспелов*

Известно, что экономическая система с фиксированными ценами не обеспечивает высокого качества продукции. Настоящая работа посвящена механизму формированию уровня качества в такой экономике. Мы рассматриваем взаимодействие экономических агентов как в замкнутой производственной системе, так и в отдельном звене производственной цепочки. В работе показано, что уровень качества может служить гибкой переменной, изменения которой компенсируют недостатки централизованного планирования и распределения ресурсов и которая в некоторой мере выполняет функции рыночной цены, обеспечивая баланс спроса и предложения.

**PRODUCT QUALITY LEVEL AS AN ECONOMICAL REGULATOR**

*S.M. Guriev, I.G. Pospelov*

It is well-known that an economical system with fixed prices does not provide high quality of a product. The present work is devoted to the mechanism of setting the quality level in such an economy. We consider the interaction of economical agents both in the closed production system and within an individual link "supplier-consumer". In the work we show that the quality level can be a flexible variable, which changes to make up for shortcomings of centralized planning and to certain extent performs the function of the market price keeping the balance of demand and supply.

Работа посвящена регулированию качества продукции в экономической системе. Даже в рыночной системе, где основным параметром, регулирующим взаимоотношения экономических агентов, является цена продукции, в разные периоды возникает различное отношение к стандарту качества. Иногда в конкуренции побеждает неважная дешевая продукция, иногда требуется в первую очередь высококачественный продукт, пусть и значительно дороже.

Еще более важным этот вопрос становится в экономических системах с фиксированными или административно регулируемыми ценами. Известно, что в советской плановой экономике доминировала тенденция к постоянному снижению качества выпускаемой продукции. Модель, явно учитывающая возможность снижать трудозатраты за счет снижения качества продукции [1], позволяет описать основные характерные особенности развития централизованной плановой экономики. Это исследование также показало, что уровень качества в принципе может служить "гибкой переменной", изменения которой позволяют в известном смысле компенсировать неизбежные дефекты централизованного планирования. Однако в [1] изучалась макромодель, в которой не рассматривался вопрос, как формируется уровень качества в процессе взаимодействия отдельных предприятий. Изучению этого вопроса посвящена настоящая работа.

Рассмотрим две чистые отрасли экономики. Продукт, выпускаемый каждой отраслью, затрачивается другой отраслью в процессе производства. Кроме того, каждая отрасль должна поставить определенное количество продукции внешним потребителям. Расчеты за поставки продукции производятся по фиксированным ценам. Отрасли стремятся максимизировать свою добавленную стоимость. Такая ситуация представляется естественной для государственных отраслей-монополистов, работающих на госзаказ в условиях хозрасчета, когда распределение доходов в значительной степени определяется решением трудового коллектива.

Предположим, что кроме упомянутых выше материальных затрат, на производство продукции в каждой отрасли необходим еще один ресурс – живой труд. Предполагается, что в каждой отрасли имеются различные технологические способы производства продукции (например, новые и старые предприятия). Материальные затраты на выпуск единицы продукта для всех технологий данной отрасли мы считаем одинаковыми ($a$ и $b$ для первой и второй отрасли соответственно), а затраты труда различными. Это позволяет описывать производственные возможности отраслей, как в [2], распределениями производственных мощностей по шкале трудоемкости $\lambda$.

Пусть производственные мощности $i$-й отрасли, $i=1,2$, распределены по технологиям с плотностью $m_i(\lambda)$ (т. е. при полном обеспечении факторами производства первая отрасль может в единицу времени произвести $m_i(\lambda)d\lambda$ единиц продукта по технологии с трудоемкостью, лежащей в интервале от $\lambda$ до $\lambda+d\lambda$). Пусть $\nu_i$ – наилучшая, а $\Lambda_i$ – наихудшая имеющиеся технологии (т.е. $m_i(\lambda)\neq 0$ лишь при $\nu_i<\lambda<\Lambda_i$).

Главное отличие данной модели от моделей, рассмотренных в [2], в том, что мы здесь допускаем возможность нарушения технологии. Предприятие может сократить или увеличить трудозатраты по сравнению с нормативом $\lambda$ за счет ухудшения или улучшения качества выпускаемой продукции. В соответствии с этим введем показатели качества $k$ и $æ$ для первой и второй отрасли экономики следующим образом: если затраты труда на выпуск единицы продукта при единичном (т. е. некотором эталонном качестве) составляли $\lambda$, то выпуск того же продукта качества $k$ потребует уже трудовых ресурсов в количестве $k\lambda$. Точно таким же образом определим и $æ$ – показатель качества продукции второй отрасли. Будем считать, что $k\in[0,\mathcal{K}]$ и $æ\in[0,\mathrm{K}]$, где $\mathcal{K}$ и $\mathrm{K}$ – реально недостижимые, высокие показатели качества.

Изменение качества продукта производственного назначения сказывается на трудозатратах его потребителя. Предположим, что в первой отрасли норма затрат труда возрастает в $\dfrac{1}{\varphi(æ)}$ раз, если в качестве сырья используется продукт не эталонного качества, а качества $æ$. Функция $\varphi(æ)$ – некоторая непрерывная возрастающая выпуклая функция, $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=1$, $\varphi(\infty)=\infty$. (Например, $\varphi(æ)=æ^n$, $n>1$. Конкретный вид функции $\varphi(æ)$ зависит от специфики производственного процесса). Аналогичную функцию для второй отрасли обозначим $\psi(k)$.

Снижение качества продукции в условиях, когда цена фиксирована и не зависит от качества, очевидно, выгодно для производителя. В то же время, потребитель сырья не может выбирать поставщика и вынужден брать что дают. Однако вызываемая этими обстоятельствами тенденция к снижению качества продукции имеет определенный предел. При слишком низком качестве сырья у потребителя просто не хватит трудовых ресурсов для его переработки, и принимать такое сырье станет бессмысленно. Предположим, что потребитель имеет право предъявить поставщику рекламацию и отказаться от сырья слишком низкого качества. В этом случае деньги за некачественный продукт производителю не выплачиваются (если продукт принят, то он оплачивается по фиксированной цене независимо от качества). Опишем возможность отказа принимать некачественную продукцию функциями приемки $w(æ)$ и $\omega(k)$. $w(æ)$ показывает долю принимаемой продукции второй отрасли качества $æ$, $\omega(k)$ – долю принимаемой продукции первой отрасли качества $k$. Будем считать, что первая отрасль может полностью распоряжаться $w(æ)$, а вторая – $\omega(k)$; для простоты будем считать, что качество продукта, идущего на конечное потребление, контролируется той же функцией приемки, что и качество продукта, используемого в производстве другой отраслью. Фактически мы предполагаем, что разделение выпуска отрасли на продукт производственного назначения, конечный продукт и брак осуществляет другая отрасль.



Наша главная задача состоит в том, чтобы выяснить, могут ли описанные механизмы взаимодействия отраслей привести к установлению в системе определенного устойчивого уровня качества выпускаемой продукции. Перейдем к формальной постановке этой задачи.

Пусть $y(k,æ,\lambda)$ – количество продукта первой отрасли качества $k$, производимого из продукта качества $æ$ по технологии с затратами труда на единицу продукции $\lambda$, $p,q$ – цены на продукцию первой и второй отрасли. Тогда добавленная стоимость (выручка от продаж произведенной продукции за вычетом материальных затрат) первой отрасли определяется как

$$u_1 = p\int_{\nu_1}^{\Lambda_1}\int_0^{\mathrm{K}}\int_0^{\mathcal{K}} \omega(k)\ y(k,æ,\lambda)\ dk\,dæ\,d\lambda - q\Big(\int_0^{\mathrm{K}} w(æ)Z(æ)dæ - C_2\Big), \tag{1}$$

где $Z(æ)=\int_{\nu_2}^{\Lambda_2}\int_0^{\mathcal{K}} z(k,æ,\lambda)dk\,d\lambda$ – плотность распределения выпуска второй отрасли по шкале качества, а $C_2$ – заданный план конечного потребления продукции второй отрасли, при этом должны выполняться следующие ограничения:

1) ограничение по производственным мощностям

$$\int_0^{\mathrm{K}}\int_0^{\mathcal{K}} y(k,æ,\lambda)\ dk\,dæ \le m_1(\lambda); \tag{2}$$

2) ограничение по материальным ресурсам

$$\int_{\nu_1}^{\Lambda_1}\int_0^{\mathcal{K}} y(k,æ,\lambda)\ dk\,d\lambda \le \frac{1}{b}\ w(æ)Z(æ); \tag{3}$$

3) ограничение по продукции конечного потребления

$$\int_{\nu_1}^{\Lambda_1}\int_0^{\mathrm{K}}\int_0^{\mathcal{K}} y(k,æ,\lambda)\ dk\,dæ\,d\lambda \le \frac{1}{b}\ \Big(\int_0^{\mathrm{K}} w(æ)Z(æ)dæ - C_2\Big); \tag{4}$$

4) ограничение по трудовым ресурсам

$$\int_{\nu_1}^{\Lambda_1}\int_0^{K}\int_0^{\mathcal{K}} \frac{k\lambda}{\varphi(\text{æ})}\, y(k,\text{æ},\lambda)\,dk\,d\text{æ}\,d\lambda \le L_1, \tag{5}$$

где $L_1$ — заданный объем трудовых ресурсов первой отрасли.

Аналогично определяются добавленная стоимость и ограничения по ресурсам для второй отрасли

$$u_2 = q\int_{\nu_1}^{\Lambda_1}\int_0^{K}\int_0^{\mathcal{K}} w(\text{æ})z(k,\text{æ},\lambda)\,dk\,d\text{æ}\,d\lambda - p\Big(\int_0^{\mathcal{K}}\omega(k)Y(k)dk - C_1\Big), \tag{1a}$$

где $Y(k) = \int_{\nu_1}^{\Lambda_1}\int_0^{K} y(k,\text{æ},\lambda)\,d\text{æ}\,d\lambda$ — плотность распределения выпуска первой отрасли по шкале качества, а $C_1$ — заданный план конечного потребления продукции первой отрасли,

$$\int_0^{K}\int_0^{\mathcal{K}} z(k,\text{æ},\lambda)\,dk\,d\text{æ} \le m_2(\lambda), \tag{2a}$$

$$\int_{\nu_2}^{\Lambda_2}\int_0^{K} z(k,\text{æ},\lambda)\,d\text{æ}\,d\lambda \le \frac{1}{a}\,\omega(k)Y(k), \tag{3a}$$

$$\int_{\nu_2}^{\Lambda_2}\int_0^{K}\int_0^{\mathcal{K}} z(k,\text{æ},\lambda)\,dk\,d\text{æ}\,d\lambda \le \frac{1}{a}\Big(\int_0^{\mathcal{K}}\omega(k)Y(k)dk - C_1\Big), \tag{4a}$$

$$\int_{\nu_2}^{\Lambda_2}\int_0^{K}\int_0^{\mathcal{K}} \frac{\text{æ}\lambda}{\psi(k)}\, z(k,\text{æ},\lambda)\,dk\,d\text{æ}\,d\lambda \le L_2, \tag{5a}$$

где $L_2$ — заданный объем трудовых ресурсов второй отрасли.

Рассмотрим игру двух участников, с функциями выигрыша $u_1$ и $u_2$ и стратегиями $(y(k,\text{æ},\lambda),w(\text{æ}))$ и $(z(k,\text{æ},\lambda),\omega(k))$ соответственно. Предполагается, что функции $\omega,w,y,z$ непрерывны и удовлетворяют ограничениям (2)–(5), (2a)–(5a).

В качестве решения игры мы будем рассматривать $\varepsilon$-равновесие по Нэшу [3]. Пара стратегий $(y^*,w^*)$ и $(z^*,\omega^*)$ образует $\varepsilon$-равновесие, если

$$u_1(y^*,w^*,z^*,\omega^*) \ge \sup_{y,w} u_1(y,w,z^*,\omega^*) - \varepsilon\ ,$$

$$u_2(y^*,w^*,z^*,\omega^*) \ge \sup_{z,\omega} u_2(y^*,w^*,z,\omega) - \varepsilon\ .$$

Мы покажем, что в $\varepsilon$-равновесии каждая отрасль выпускает продукцию одного определенного качества ($k_0$ и $\text{æ}_0$ в первой и второй отрасли, соответственно). Равновесные уровни качества $k_0$ и $\text{æ}_0$ и соответствующие выпуски отраслей $\bar{Y},\bar{Z}$ определяются из уравнений



$$\bar{Y} = a\bar{Z}+C_1\ ; \qquad \bar{Z} = b\bar{Y}+C_2\ . \tag{6}$$

$$\bar{Y} = f_1(L_1\varphi(\text{æ}_0)/k_0)\ ; \qquad \bar{Z} = f_2(L_2\psi(k_0)/\text{æ}_0) \tag{7}$$

где $f_i(x)$ — производственные функции отраслей, построенные по заданным распределениям мощностей по трудоемкости [2],

$$f_i(x) = \int_{\nu_i}^{\xi_i(x)} m_i(\lambda)d\lambda,$$

$$\int_{\nu_i}^{\xi_i(x)} \lambda m_i(\lambda)d\lambda = x, \quad \text{если} \quad \int_{\nu_i}^{\Lambda_i} m_i(\lambda)d\lambda \ge x\ ,$$

$$\xi_i(x) = \Lambda_i\ , \quad \text{если} \quad \int_{\nu_i}^{\Lambda_i} m_i(\lambda)\,d\lambda \le x\ .$$

Т е о р е м а 1. *Если* 1) *Коэффициенты прямых затрат $a$ и $b$ удовлетворяют условию продуктивности $ab<1$,*

*2) Планы конечного выпуска отраслей $C_1$ и $C_2$ согласованы с производственными возможностями*

$$\bar{Y} = \frac{C_1+aC_2}{1-ab} \le \int_{\nu_1}^{\Lambda_1} m_1(\lambda)d\lambda \quad \text{и} \quad \bar{Z} = \frac{bC_1+C_2}{1-ab} \le \int_{\nu_2}^{\Lambda_2} m_2(\lambda)d\lambda \tag{8}$$

*тогда система (6)–(7) разрешима относительно $\bar{Y}$ и $\bar{Z}$.*

Простое доказательство этой теоремы ради экономии места не приводим.

Для доказательства основного утверждения нам понадобится следующий бесконечномерный аналог обратного утверждения теоремы Куна-Таккера. Рассмотрим банаховы пространства $H$ и $Y$, причем $Y$ упорядочено конусом неотрицательных элементов $P$. Пусть $C\subset H$, $f(x)$ — вещественный функционал, определенный и ограниченный на $C$, $F(x)$ — отображение из $H$ в $Y$.

Л е м м а. *Пусть в двойственном конусе $P^*$ найдется элемент $v$ такой, что функция Лагранжа $\mathcal{L}_v(x)=f(x)-\langle v,F(x)\rangle$ ограничена при $x\in C$ и имеет максимизирующую последовательность $x_n$, для которой при всех $n$ выполнены условия дополняющей нежесткости $\langle v,F(x_n)\rangle=0$ и неравенства $F(x_n)\le 0$.*

*Тогда $x_n$ — максимизирующая последовательность функционала $f(x)$ на допустимом множестве $\{x\in C:F(x)\le 0\}$.*

*Утверждается, что для любого $\varepsilon>0$ найдется номер $n_0$ такой, что для любого $n>n_0$ и любого $x\in C$ такого, что $F(x)\le 0$, выполнено $f(x)\le f(x_n)+\varepsilon$. Другими словами* $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \sup\limits_{x\in C,\,F(x)\le 0} f(x)$.

Отметим, что $x_n$ может и не сходиться к элементу $C$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $x_n$ — максимизирующая последовательность функции Лагранжа на множестве $C$ и $\langle v,F(x_n)\rangle=0$,

$$\sup_{x\in C} f(x)-\langle v,F(x)\rangle = \lim_{n\to\infty} f(x_n)-\langle v,F(x_n)\rangle = \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Это значит, что для любого $\varepsilon>0$ найдется $n_0$ такой, что для любого $n>n_0$ и любого $x\in C$ $f(x)-\langle v,F(x)\rangle\le f(x_n)+\varepsilon$.

Но если $F(x)\le 0$, то $\langle v,F(x)\rangle\le 0$, так что $f(x)\le f(x_n)+\varepsilon$.

Лемма доказана.

Перейдем теперь к основному утверждению. Ниже используются следующие обозначения: $\delta_n(x)$, $\delta_n'(x)$ – произвольные неотрицательные последовательности непрерывных функций, сходящиеся справа к $\delta$-функции Дирака:

$$\delta_n(x)\ge 0;\ \delta_n(x)=0 \text{ при } x<0 \text{ или } x>\varepsilon_n;\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta_n(x)dx=1,\ \varepsilon_n\to +0;$$

$\vartheta(x)$ – $\vartheta$-функция Хэвисайда:

$$\vartheta(x) = \begin{cases} 1, & x\ge 0 \\ 0, & x<0 \end{cases},$$

а $\sigma_a(x)$ – непрерывная функция, подчиняющаяся условиям:

$$\sigma_a(x)=0 \quad \text{при } x\le 0$$
$$0\le\sigma_a(x)<1 \quad \text{при } 0<x<a$$
$$\sigma_a(x)=1 \quad \text{при } x\ge a$$

Т е о р е м а 2. *Пусть $p>bq$ и $q>ap$, а $k_0,\varkappa_0,\xi_1,\xi_2$ удовлетворяют условиям* (6) *и* (7). *Тогда*

$$y_n^*(k,\varkappa,\lambda) = m_1(\lambda)\ \theta(\xi_1-\lambda)\ \delta_n(k-k_0)\ \delta_n(\varkappa-\varkappa_0)$$
$$z_n^*(k,\varkappa,\lambda) = m_2(\lambda)\ \theta(\xi_2-\lambda)\ \delta_n(k-k_0)\ \delta_n(\varkappa-\varkappa_0)$$
$$w^*(\varkappa) = \sigma_{\varkappa_0}(\varkappa)$$
$$v^*(k) = \sigma_{k_0}(k)$$

*является $\varepsilon_n$-равновесием по Нэшу игры (1)–(5), (1a)–(5a).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению $\varepsilon_n$-равновесия надо показать, что

а) при $z=z_n^*$ и $\omega=\omega^*$ последовательностью, максимизирующей значение функционала (1) при условиях (2)–(5), является $y=y_n^*$ и $w=w^*$;

б) при $y=y_n^*$ и $w=w^*$ последовательностью, максимизирующей значение функционала (1a) при условиях (2a)–(5a), является $z=z_n^*$ и $\omega=\omega^*$.

В силу симметричности задачи достаточно доказать только (а) – доказательство утверждения (б) будет аналогичным. Для доказательства теоремы 2 покажем, что при любом фиксированном $n$ последовательностью, максимизирующей значение функционала (1), при ограничениях (2)–(5) в банаховом пространстве $C(G)$, $G=[0,\mathcal{K}]\times[0,K]\times[\nu_1,\Lambda_1]$, служит $y_n=y_n^*$ и $w=w^*$. Ради этого рассмотрим следующую задачу линейной оптимизации по $y$ и $w$:

$$p\int_{\nu_1}^{\Lambda_1}\int_0^K\int_0^{\mathcal{K}}\omega(k)y(k,\varkappa,\lambda)\ dkd\varkappa d\lambda - q\Big(\int_0^K w(\varkappa)Z(\varkappa)d\varkappa - C_2\Big) \Rightarrow \max \qquad (1b)$$



$$\int_0^K\int_0^{\mathcal{K}} y(k,\varkappa,\lambda)dkd\varkappa \le m_1(\lambda), \qquad (2b)$$

$$\int_{\nu_1}^{\Lambda_1}\int_0^{\mathcal{K}} y(k,\varkappa,\lambda)dkd\lambda \le \frac{1}{b}\,w(\varkappa)Z(\varkappa), \qquad (3b)$$

$$\int_{\nu_1}^{\Lambda_1}\int_0^K\int_0^{\mathcal{K}} y(k,\varkappa,\lambda)dkd\varkappa d\lambda \le \frac{1}{b}\Big(\int_0^K w(\varkappa)Z(\varkappa)d\varkappa - C_2\Big), \qquad (4b)$$

$$\int_{\nu_1}^{\Lambda_1}\int_0^K\int_0^{\mathcal{K}} \frac{k\lambda}{\varphi(\varkappa)}\,y(k,\varkappa,\lambda)dkd\varkappa d\lambda \le L_1. \qquad (5b)$$

Если $Z(\varkappa)=\overline{Z}\delta_n(\varkappa-\varkappa_0)$, а $\overline{Z}\ge C_2$, то допустимое множество задачи не пусто.

Ограничения (2b)–(5b) имеют вид $F(x)\le 0$ для некоторого отображения $F$:$C(G)\times C[0,K]\to C[\nu_1,\Lambda_1]\times C[0,K]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Конус $P^*$, двойственный к конусу неотрицательных элементов в $C[\nu_1,\Lambda_1]\times C[0,K]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ представляет собой прямое произведение пространств неотрицательных мер на $[\nu_1,\Lambda_1]$ и $[0,K]$ и неотрицательного ортанта $\mathbb{R}^2$. В качестве множества $C$ рассмотрим множество пар $(y,w)$ $(y(k,\varkappa,\lambda)\in C([0,\mathcal{K}]\times[0,K]\times[\nu_1,\Lambda_1])$, $w(\varkappa)\in C[0,K])$ таких, что

$$y(k,\varkappa,\lambda)\ge 0,\ 0\le w(\varkappa)\le 1 \quad\text{и}\quad \int_{\nu_1}^{\Lambda_1}\int_0^K\int_0^{\mathcal{K}} y(k,\varkappa,\lambda)dkd\varkappa d\lambda \le \int_{\nu_1}^{\Lambda_1} m_1(\lambda)d\lambda .$$

Значение функционала $u_1$ на $C$, очевидно, ограничено, а функция Лагранжа имеет вид

$$\mathcal{L} = \int_{\nu_1}^{\Lambda_1}\int_0^K\int_0^{\mathcal{K}}\Big(p\omega(k)-\alpha(\lambda)-\beta(\varkappa)-\gamma-\frac{\delta k\lambda}{\varphi(\varkappa)}\Big)y(k,\varkappa,\lambda)dkd\varkappa d\lambda+\delta L_1+$$
$$+\int_{\nu_1}^{\Lambda_1}\alpha(\lambda)m_1(\lambda)d\lambda + \int_0^K\frac{1}{b}\beta(\varkappa)w(\varkappa)Z(\varkappa)d\varkappa + \Big(\frac{\gamma}{b}-q\Big)\Big(\int_0^K w(\varkappa)Z(\varkappa)d\varkappa-C_2\Big),$$

где $\alpha(\lambda)$, $\beta(\varkappa)$, $\gamma$, $\delta$ – множители Лагранжа, соответствующие ограничениям (2b)–(5b).

Положим

$$\alpha^*(\lambda)=0,\ \beta^*(\varkappa)=0,\ \gamma^*=p\omega(k_0)=p,\ \delta^*=0,\ \ (y_n,w_n)=(y_n^*,w^*) \qquad (9)$$

Покажем, что $(y_n^*,w^*)$ максимизирует значение функции Лагранжа на множестве $C$, удовлетворяет ограничениям (2b)–(5b) и условиям дополняющей нежесткости. При условии (9)

$$\mathcal{L} = p\int_{\nu_1}^{\Lambda_1}\int_0^K\int_0^{\mathcal{K}}(\omega(k)-1)y(k,\varkappa,\lambda)dkd\varkappa d\lambda + \Big(\frac{p}{b}-q\Big)(w(\varkappa_0)\overline{Z} - C_2).$$

Так как $\omega(k) \le 1$, $\sup\limits_{C} \mathcal{L} \le (\frac{p}{b} - q)(w^*(\text{æ}_0)\overline{Z} - C_2)$, а так как $\omega(k_0) = w^*(\text{æ}_0) = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{L}(y_n^*, w^*) = (\frac{p}{b} - q)(\overline{Z} - C_2)$. Значит, $(y_n^*, w^*)$ максимизирует значение функции Лагранжа на множестве $C$.

Нетрудно также доказать, что $(y_n^*, w^*)$ удовлетворяет ограничениям (2b)–(5b). Ограничение (2b) выполняется как равенство при $\lambda \le \xi_1$ и как строгое неравенство при $\lambda > \xi_1$; ограничение (3b) выполняется как равенство при $\text{æ} \le \text{æ}_0$ или $\text{æ} \ge \text{æ}_0 + \varepsilon_n$ и как строгое неравенство при $\text{æ}_0 < \text{æ} < \text{æ}_0 + \varepsilon_n$, так как зависимости $y$ и $z$ от $\text{æ}$ имеют одну и ту же форму; ограничение (4b) выполняется как равенство; так как $\varphi(\text{æ})$ растет быстрее, чем $\text{æ}$, ограничение (5b) выполняется как строгое неравенство, в пределе при $n \to \infty$ как равенство. Так как все, за исключением $\gamma$, множители Лагранжа равны 0, а соответствующее $\gamma$ ограничение (4b) выполняется как равенство, условия дополняющей нежесткости, очевидно, выполнены.

Итак, последовательность $(y_n^*, w^*)$ удовлетворяет условиям леммы, и, следовательно, она максимизирует значение функционала (1b) на множестве $C$ при ограничениях (2b)–(5b), что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е . Равенство нулю множителя Лагранжа $\delta$ означает равенство нулю правой производной функционала добавленной стоимости по количеству трудовых ресурсов. Это понятно, так как в точке Нэша эффективным является не только ограничение по труду, но и ограничение по материальным ресурсам; увеличение объема трудовых ресурсов не приводит к увеличению выпуска продукции, потому что количество принимаемого в обработку продукта уже нельзя увеличить. Однако левая производная функционала добавленной стоимости по количеству трудовых ресурсов не равна нулю – при уменьшении количества трудовых ресурсов производство сокращается. Кстати, даже при увеличении количества трудовых ресурсов в обеих отраслях изменяется лишь качество, но не количество выпускаемой продукции. Действительно, добавленная стоимость первой и второй отрасли в равновесии

$$u_1 = \overline{Y}(p - qb) = \frac{C_1 + aC_2}{1 - ab}(p - qb) \quad \text{и}$$

$$u_2 = \overline{Z}(q - ap) = \frac{bC_1 + C_2}{1 - ab}(q - ap)$$

не зависит от объема трудовых ресурсов.

Рассмотрим теперь вопрос об оптимальности по Парето найденного решения. Нетрудно доказать, что при повышении дохода первой отрасли по сравнению с доходом в точке Нэша растет также и доход второй отрасли, и наоборот. Отсюда можно сделать вывод : если точка Нэша оптимальна по Парето, она является также и глобальным максимумом функций выигрыша обоих участников. Но Парето – оптимальна она в том и только в том случае, когда одно из условий (8) выполняется как равенство, то есть когда один из участников имеет ровно столько производственных мощностей, сколько нужно (не больше и не меньше). Иначе сговор участников приведет к отклонению от равновесия по Нэшу. Казалось бы, при механизме управления качеством, когда конечный потребитель не защищен от некачественной продукции, сговор производителей должен приводить к увеличению выпуска продукции за счет ухудшения ее качества. Однако, если производители обмениваются информацией и согласованно изменяют качество, им выгодно не снижать, а повышать качество – чем лучше



качество продукта первой отрасли, тем лучше качество изготовленного из него продукта второй отрасли, и, так как функции $\phi$ и $\psi$ выпуклы, тем ниже затраты труда на единицу продукции при использовании каждой технологии первой отрасли. Такое согласованное повышение качества дает увеличение не только количества, но и качества конечного продукта, однако, к сожалению, оно не является устойчивым. Как только производители перестают доверять друг другу, начинается процесс поочередного снижения качества, который сходится к равновесию по Нэшу, описанному в теореме 2.

Именно это, по всей видимости, происходило в советской плановой экономике с ростом длины технологических цепочек и при отсутствии механизмов эффективного обмена информацией между производителями. В этих условиях все производители не могут договориться, соответственно, задача совместного управления качеством разбивается на задачи регулирования качества в каждом звене "производитель–приемщик". В такой задаче интересы участников оказываются антагонистическими. Действительно, рассмотрим экономическую систему из двух отраслей – добывающей и перерабатывающей - продукт первой из которых (возможно, некачественный) является сырьем для второй, продукция которой уже не используется первой, а является выходной характеристикой системы. Будем считать, что качество продукции второй отрасли не находится в ее распоряжении и соответствует стандарту ($\text{æ} = 1$). Тогда функции выигрыша (1) и (1a) и ограничения на выбор стратегий (2)–(5),(2a)–(5a) записываются следующим образом:

$$p \int_{\nu_1}^{\Lambda_1} \int_0^{\mathcal{K}} \omega(k) y(k,\lambda)\, dk d\lambda \Rightarrow \max , \tag{10}$$

1) ограничение по производственным мощностям

$$\int_0^{\mathcal{K}} y(k,\lambda)\, dk \le m_1(\lambda), \tag{11}$$

2) ограничение по трудовым ресурсам

$$\int_{\nu_1}^{\Lambda_1} \int_0^{\mathcal{K}} k\lambda y(k,\lambda) dk d\lambda \le L_1 \tag{12}$$

Для второй отрасли

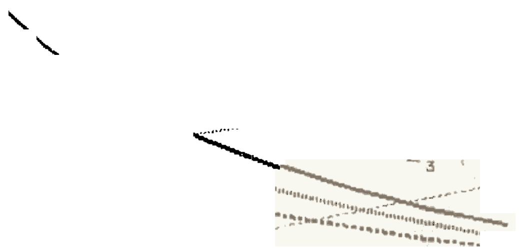
$$q \int_{\nu_2}^{\Lambda_2} \int_0^{\mathcal{K}} z(k,\lambda) dk d\lambda - p \int_0^{\mathcal{K}} \omega(k) Y(k) dk \Rightarrow \max \tag{13}$$

1) ограничение по производственным мощностям

$$\int_0^{\mathcal{K}} z(k,\lambda) dk \le m_2(\lambda) , \tag{14}$$

2) ограничение по сырью

и величин $L\nu_1/m_1$ и $L\nu_2/m_2$ на равновесные качество и производительность при фиксированном соотношении цен $\alpha$. При увеличении производственных мощностей добывающей отрасли кривая предложения смещается вверх, что приводит к улучшению качества и увеличению количества выпускаемой продукции. При увеличении производственных мощностей перерабатывающей отрасли кривая спроса смещается вверх, поэтому, хотя выпуск продукта и растет, качество его ухудшается. При повышении эффективности наилучшей технологии перерабатывающей отрасли по сравнению с наилучшей технологией добывающей отрасли кривая спроса смещается вверх относительно кривой предложения, и это также приводит к ухудшению качества продукта.




Влияние параметров задачи на кривые спроса и предложения. $Y_1,Z_1$ соответствуют соотношению наилучших технологий $a\nu_1/\nu_2=10$, удельной мощности первой отрасли $m_1/(L\nu_1)=10$, удельной мощности второй отрасли $m_2/(L\nu_2)=10$. $Y_2,Z_2$ соответствуют значениям $a\nu_1/\nu_2=10$, $m_1/(L\nu_1)=5$, $m_2/(L\nu_2)=0.5$. $Y_3,Z_3$ соответствуют $a\nu_1/\nu_2=3.3$, $m_1/(L\nu_1)=3.3$, $m_2/(L\nu_2)=10$.

Итак, мы рассмотрели два варианта модели производства продукции низкого качества в системе с фиксированными ценами. В обоих вариантах производители сгруппированы в две чистые отрасли, каждая из которых, помимо продукции другой отрасли, использует единственный ресурс – живой труд, количество которого ограничено. Технологическая эффективность производственных мощностей отраслей характеризуется трудоемкостью единицы продукции. Уровень отклонения от технологии мы приняли за индикатор качества выпускаемой продукции. Так как цены в системе неизменны, они не могут служить регулятором качества, и возникает вопрос, что же все-таки удерживает



производителя от бесконтрольного снижения качества выпускаемой им продукции. Мы предположили, что в таком случае механизмом управления качеством могут быть рекламации, то есть возможность потребителя полностью или частично отказаться от продукта слишком низкого качества. Как показывают теоремы 2 и 3, при таком механизме управления качеством равновесными по Нэшу являются ситуации, когда в системе производится продукция только одного качества. Это наводит на мысль об аналогии между равновесным качеством и рыночной ценой (точнее, величиной, обратной цене) – как на рынке все производители (за исключением самых неэффективных) продают продукцию по одной и той же равновесной рыночной цене, так и в нашей модели все предприятия отрасли поставляют продукцию только одного (равновесного) качества. Как и в случае рынка, установление единого равновесного уровня качества объясняется тем, что производителю невыгодно выпускать продукцию качества выше, чем равновесное, а продукция низшего качества не пользуется спросом – потребителю невыгодно ее перерабатывать.

Отметим, что описанный механизм не только приводит к выпуску продукции только одного качества, но и устанавливает это качество как раз на таком уровне, чтобы уравнять спрос и предложение при полном использовании трудовых ресурсов (или полной загрузке производственных мощностей, если трудовые ресурсы в избытке) в обеих отраслях.

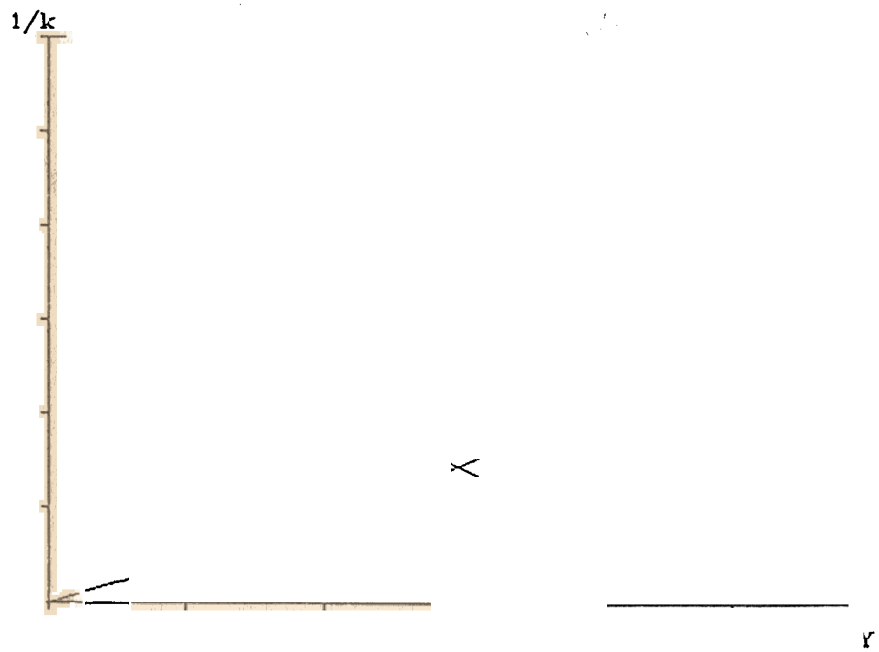



Рис.3 Кривые спроса и предложения в координатах "выпуск обратное качество".

Интересно, что, хотя в обоих вариантах и устанавливается единственный равновесный уровень качества, смысл этого равновесия в первом и втором вариантах разный. В первом случае равновесие по Нэшу не является оптимальным по Парето, интересы участников не противоположны. Так как они поставляют продукцию друг другу, им выгодно согласованно повышать уровень качес-