

# Теория и практика применения оптимальных методов аппроксимации выпуклых тел многогранниками

*А.В. Лотов, Г.К. Каменев, Л.В. Бурмистрова, Р.В. Ефремов*

Аппроксимация является стандартным средством в теории выпуклых тел. Первые аппроксимационные теоремы восходят к Минковскому. В частности, им было доказано, что для каждого выпуклого тела можно найти сходящуюся последовательность выпуклых полиэдров. Это возможность широко использовалась для получения различных теоретических результатов, связанных с геометрией выпуклых поверхностей. Однако долгое время интерес к задаче был сугубо теоретическим.

На важность практической аппроксимации выпуклых тел многогранниками возможно впервые указано в классической работе [1] в связи с проблемой аппроксимации множеств достижимости динамических систем. В настоящее время задача аппроксимации выпуклых тел многогранниками возникает во многих приложениях: при исследовании управляемых систем, в математическом программировании, кодировании изображений, дизайне и др. Принципиальное значение практические алгоритмы аппроксимации выпуклых тел многогранниками имеют в задачах принятия решений на основе метода достижимых целей [2, 3].

До 70-х гг. методы построения полиэдральных аппроксимаций существовали, в основном, "на бумаге" и вытекали из конструкций, использовавшихся при получении соответствующих теоретических оценок. Далее стандартный подход к построению многогранников, аппроксимирующих выпуклые множества, стал основываться на расчете значений опорной функции аппроксимируемого множества на некоторой заданной сетке направлений. Однако в [4] было показано, что использование заранее заданных (так называемых неадаптивных) сеток направлений не позволяет эффективно аппроксимировать многомерные множества.

С 80-х гг. в Вычислительном центре Академии наук в рамках метода множеств достижимости развивались теория и практика адап-

тивных методов полиэдральной аппроксимации. В настоящее время предложен, теоретически и экспериментально исследован и нашел практическое применение целый ряд алгоритмов аппроксимации, оптимальных с точки зрения сложности описания аппроксимирующих многогранников и числа экспериментов с аппроксимируемым телом (см. обзоры в [2, 3]).

Среди современных приложений методов полиэдральной аппроксимации в рамках метода достижимых целей укажем на их практическое применение в задачах экономического и экологического планирования. Наиболее широкое применение эти методы нашли в практике поиска стратегий улучшения качества воды. В настоящее время эти работы выполняются по заказу Министерства природных ресурсов РФ в рамках федеральной целевой программы "Возрождение Волги" [3].

## Литература

1. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.
2. *Bushenkov V.A., Chernykh O.L., Kamenev G.K., and Lotov A.V.* Multi-dimensional Images Given by Mappings: Construction and Visualization, Pattern Recognition and Image Analysis, 1995. Vol. 5. № 1. P. 35-56.
3. *Лотов А.В., Бушечков В.А., Каменев Г.К.* Метод достижимых целей. Математические основы и экологические приложения. The Edwin Mellen Press. 1999.
4. *Sonnevend G.* An optimal sequential algorithm for uniform approximation of convex functions on  $[0, 1]^2$  // Appl. Math. and Optimizat. 1983. № 10. P. 127-142.