а-

А.А.Шананин
Вычислительный центр РАН, Москва

(код прое та 96-01-00664).

1

-Дебре. Будем считать, что в эко-
m видов товаров, n k производителей. Производственные
j - $(j = 1,...,n)$
$D_j \subset R^m$, содержащим 0. Производители максимизируют прибыль, поэтому их поведение
$\pi_j(p) = \max\limits_{x \in D_j} px$, здесь $p \in R_+^m \setminus \{0\}$
цен на рассматриваемые товары, а $\pi_j(p)$ j-го производителя. Предложение
$\xi(p) = \arg\max\{px | x \in D\}$, где
$D = \sum_{i=1}^{m} D_i$ суммарное технологическое множество производителей. Предполагается, что i -
$(i = 1,...,n)$ $w^i \in \operatorname{int} R_+^m$
α_{ij} j-го производителя, где $\sum_{i=1}^{k} \alpha_{ij} = 1, \alpha_{ij} \geq 0 \ (i = 1,...,n,\ j = 1,...,m)$.
i - $u_i(x)$,
R_+^m и являющейся непрерывной, вогнутой, монотонно неубывающей функцией
R_+^m, не имеющей максимумов. Поведение i -

$$\varphi_i(p) = Arg\max\left\{u_i(x) \middle| x \in R_+^m, px \leq pw_i + \sum \alpha_{ij}\pi_j(p)\right\},$$

i-го потребителя. Совокупное поведение потребителей опреде-
$\varphi(p) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(p)$. Очевидно, что $\varphi(\lambda p) = \varphi(p)$
$\lambda > 0, p \in R_+^m$. Совокупное предложение ф а-

$\psi(p) = \xi(p) + \sum_{i=1}^{n} w^i$, называемым функцией предложения. Вектором равновесных цен назы-
$\hat{p} \in R_+^m \setminus \{0\}$, такой что $\varphi(p) \cap \left(\psi(p) - R_+^m\right) \neq \varnothing$.
$E = D + \sum_{i=1}^{n} w^i$ и предположим, что E выпуклый компакт.

Рассмотрим сначала частный случай, когда функция спроса $\varphi(p)$ ч-
ным отображением и существует вогнутая, непрерывная, положительно однородная первой степени, положительная на R_+^m $F(x)$, такая что

$$\varphi(p) = \arg\max\left\{F(x)\middle| px \le p\varphi(p), x \in R_+^m\right\}. \qquad (1)$$

Условие (1) означает, что функци

требителей. Доопределим $F(x) = -\infty$ $x \notin R_+^m$

$$\max\left\{F(x)\middle| x \in E - R_+^m\right\}. \qquad (2)$$

$\left(E - R_+^m\right) \cap R_+^m$ непустой компакт, а $F(x)$ R_+^m , задача (2) $\hat{x}$.

Предложение 1. $\hat{p}$ *, такой что* $\hat{x} = \varphi(\hat{p})$

$\hat{p}$

$$\min\left\{\sum_{j=1}^{k} \pi_j(p) + \sum_{i=1}^{m} pw^i \middle| q(p) \ge 1, p \in R_+^m\right\} \qquad (3)$$

$$q(p) = \inf\left\{\frac{px}{F(x)}\middle| F(x) > 0, x \in R_+^m\right\}.$$

Предложение 1 получается как следствие теоремы Фенхеля о двойственных задачах выпуклого программирования (см. [1], с. 46). Задача выпуклого программирования (3) оказывается двойственной к задаче (1) и задает

цен. О

спроса, не удовлетворяющих гипотезе о рациональном поведении, так в ограничения задачи (3) $q(p)$, существующий лишь при выполнении этой гипотезы (см. [2], с. 500).

$q(p)$ е-

$E - R_+^m$, которая при $p \in R_+^m$ ункционалом задачи (3), можно преобразовать задачу (3).

Предложение 2. $\Pi = \min\left\{\sum_{j=1}^{k} \pi_j(p) + \sum_{i=1}^{m} pw^i \middle| q(p) \ge 1, p \in R_+^m\right\}$

$\hat{p} \in Arg\min\left\{\sum_{j=1}^{k} \pi_j(p) + \sum_{i=1}^{m} pw^i \middle| q(p) \ge 1, p \in R_+^m\right\}$*, то вектор* $\dfrac{\hat{p}}{\Pi}$ *е-*

$$\max\left\{q(p)\middle| \sum_{j=1}^{k} \pi_j(p) + \sum_{i=1}^{m} pw^i \le 1, p \in R_+^m\right\} \qquad (4)$$

при этом оптимальное значение функционала в задаче (4) равно $\dfrac{1}{\Pi}$.

Вариационный принцип (4) уже допускает обобщения для этого однако надо воспользо- ции функций.

2. Двойственность для задач обобщенного программирова-

E R^m $\varphi(x)$ R^m

R^m , такое что при любо $x \in E$ $\varphi(x)$ является конусом. Пару $\left(E, \varphi(x)\right)$ называть задачей обобщенного программирования (ЗОП).

Определение. *Будем говорить, что вектор* $\hat{x}$ $\left(E, \varphi(x)\right)$*, если*

$\hat{x} \in E$ $\hat{p} \in \varphi(\hat{x})$*, что при любых* $y \in E$

$\hat{p}\hat{x} \ge \hat{p}y$*. Будем при этом также говорить, что вектор* $\hat{p}$ *е-*

$\hat{x}$ *ЗОП.*

Введенные понятия ЗОП и ее решения являются частным случаем класса задач, известного как вариационные неравенства, и понятия решения вариационного неравенства (см., например, [1] с.157).

Теорема о существовании решения. E $\varphi(x)$ *полунепрерывное сверху многозначное отображение, такое что при любом* $x \in E$ $\varphi(x)$ *является непустым, выпуклым, замкнутым конусом. Тогда ЗОП* $\left(E, \varphi(x)\right)$ *е-ние.*

Доказательство. $\varphi(x)$ является замкнутым (см. [3], с.95). Рассмотрим

$$C(x) = \varphi(x) \cap \left\{p \in R^m \middle| \|p\| \leq 1\right\},$$

мкнутых отображений. Кроме того, при любом $x \in E$ $C(x)$ непустой выпуклый компакт, содержащийся в ничном шаре. Тогда $C(x)$ полунепрерывное сверху отображение (см. [3], с. 95). По теореме ании решения вариационного неравенства (см. [1], с.158) существуют $\hat{x} \in E$ $\hat{p} \in C(\hat{x})$, что при любых $y \in E$ $\hat{p}(\hat{x} - y) \geq 0$. По определению сюда следует, что $\hat{x}$ $\left(E, \varphi(x)\right)$. Теорема доказана.

$E^0 = \left\{p \middle| px \leq 1 \ \forall x \in E\right\}$ E, через $W(p,E) = \sup\limits_{x \in E} px$ E, а через $\varphi^{-1}(p) = \left\{x \middle| p \in \varphi(x)\right\}$ о- $\varphi(x)$.

Определение. $\left(E^0, \varphi^{-1}(p)\right)$ *а-венством (ДВН) к ЗОП* $\left(E, \varphi(x)\right)$. *Вектор* $\hat{p}$ *называется решением ДВН, если* $\hat{p} \in E^0$ *у-* $\hat{x} \in \varphi^{-1}(\hat{p})$, *такой что* $\hat{p}\hat{x} \geq q\hat{x}$ $q \in E^0$. *Будем при этом говорить, что вектор* $\hat{x}$ $\hat{p}$ $\left(E^0, \varphi^{-1}(p)\right)$.

ти. E R^m, *содер-* 0. *Справедливы следующие утверждения.*

1. $\hat{x}$ $\left(E, \varphi(x)\right)$ $\hat{p}$ *ему соответствует. Если* $\hat{p}\hat{x} > 0$, *то вектор* $\dfrac{1}{\hat{p}\hat{x}}\hat{p}$ $\left(E^0, \varphi^{-1}(p)\right)$ $\hat{x}$ *т-ветствует* .
2. $\hat{p}$ $\left(E^0, \varphi^{-1}(p)\right)$ $\hat{x}$ *ему соответствует.* $\hat{p}\hat{x} = W(\hat{p}, E) > 0$, *то вектор* $\hat{x}$ $\left(E, \varphi(x)\right)$ $\hat{p}$ *ему соответствует.*

Доказательство. $\hat{x}$ $\left(E, \varphi(x)\right)$ $\hat{p}$ о-ответствует, то $\hat{x} \in E$, $\hat{p} \in \varphi(\hat{x})$ $y \in E$ $\hat{p}\hat{x} \geq \hat{p}y$. От- $\hat{p}\hat{x} > 0$ следует, $\dfrac{1}{\hat{p}\hat{x}}\hat{p}y \leq 1$ $y \in E$, т.е. $\dfrac{1}{\hat{p}\hat{x}}\hat{p} \in E^0$. По- $\varphi(\hat{x})$ конус, из $\hat{p} \in \varphi(\hat{x})$ имеем, что $\hat{x} \in \varphi^{-1}\left(\dfrac{1}{\hat{p}\hat{x}}\hat{p}\right)$. Поскольку E у-тое множество, содержащее 0, справедливо равенство $\left(E^0\right)^0 = E$ (см. [4], с. 143). Следовательно, $\hat{x} \in \left(E^0\right)^0$, т.е. $q\hat{x} \le 1 = \frac{1}{\hat{p}\hat{x}}\hat{p}\hat{x}$ $q \in E^0$. Таким образом, по определению век-

$\frac{1}{\hat{p}\hat{x}}\hat{p}$ $\left(E^0, \varphi^{-1}(p)\right)$ $\hat{x}$ ему соответствует.

Докажем теперь утверждение 2. Если вектор $\hat{p}$ $\left(E^0, \varphi^{-1}(p)\right)$ $\hat{x}$ ему соответствует, то $\hat{p} \in E^0$, $\hat{x} \in \varphi^{-1}(\hat{p})$

$$\hat{p}\hat{x} \ge q\hat{x} \qquad q \in E^0. \tag{5}$$

$\hat{p} \in \varphi(\hat{x})$. Если допустить, что $0 < W(\hat{p}, E) < 1$, то $\frac{1}{W(\hat{p},E)}\hat{p} \in E^0$

$\frac{1}{W(\hat{p},E)}\hat{p}\hat{x} > \hat{p}\hat{x}$, что противоречит (5). Следовательно, $W(\hat{p},E) = 1$ и из (5) получаем, что $\hat{x} \in \left(E^0\right)^0 = E$. Из $\hat{p} \in E^0$ имеем, что $\hat{p}x \le 1$ $x \in E$. Поскольку $\hat{p}\hat{x} = W(\hat{p},E) = 1$, получаем, что $\hat{p}x \le \hat{p}\hat{x}$ $x \in E$. Таким образом, по определе- $\hat{x}$ $\left(E, \varphi(x)\right)$ $\hat{p}$ ему соответствует. Теорема двой-

.

Заметим, что если $\varphi(\lambda x) = \varphi(x)$ x $\lambda > 0$. Тогда множество $\varphi^{-1}(p)$ а- $\left(E^0, \varphi^{-1}(p)\right)$ превращается в ЗОП. Если дополнительно $\left(E^0\right)^0 = E$, $\left(E^0, \varphi^{-1}(p)\right)$ $\left(E, \varphi(x)\right)$.

3. - о-

Обобщением задачи оптимизации (2) для модели Эрроу- $\left(E - R_+^m, \varphi^{-1}(p)\right)$.

е 3. *$\hat{x}$ $\left(E - R_+^m, \varphi^{-1}(p)\right)$ $\hat{p}$ т-вует, то $\hat{p}$ является вектором равновесных цен. Обратно, если $\hat{p}$ вектор равновесных цен, то $\left(E - R_+^m, \varphi^{-1}(p)\right)$, котором соответствует $\hat{p}$.*

Заметим, что многозначное отображение в ЗОП $\left(E - R_+^m, \varphi^{-1}(p)\right)$ некоторых точках пустые значения, поэтому к этой задаче нельзя применить теорему о т-вовании решения ЗОП. Рассмотрим соответствующее ДВН $\left(\left(E - R_+^m\right)^0, \varphi(p)\right)$. С помощью

Предложение 4. $\hat{p}$ $\hat{p}$ *новесных цен.*

ланных в разделе 1 предположениях $0 \in \operatorname{int}\left(E - R_+^m\right)$, поэтому $\left(E - R_+^m\right)^0$ R_+^m (см. [4], с.143). Кроме того, можно модифицировать так, что оно станет полунепрерывным сверху отображением, непустыми выпуклыми компактными значениями (см. [3], гл. 5), применить теорему о существовании решения вариационного неравенства (см. [1], с. 158) и решение модифицированной задачи является равновес-ром цен.

$\left(\left(E - R_+^m\right)^0, \varphi(p)\right)$ является обобщением вариационного принципа (4) для модели -Дебре. Отметим, что исследование ЗОП и ДВН позволяет совмещать ь-ществования равновесия с изучением его свойств, которые можно переформулировать (см. [2], с. 503)

1. *Обен Ж.-П.* Нелинейный анализ и его экономические приложения. М.: Мир, 1988, 264 с.
2. *Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А.* и-ки. М.: Энерг атомиздат, 1996, 544 с.
3. *Никайдо Х.* Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир, 1972, 518 с.
4. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973, 469 с.