технологий.
Аттрактор цепочки Ленгмюра.

Я.М.Ташлицкая, А.А.Шананин

1. ____________________________ - _______________

$n = 0, 1, \ldots$

$F_n(t)$ - доля предприятий, которые находятся в момент t на уровнях с номерами не большими , чем n.

$t \in [0, \infty)$.

$$F = \{F_n(t)\}$$

и-

ятий по уровням эффективности.

$$\frac{dF_n(t)}{dt} = -(\alpha + \beta(1 - F_n(t))(F_n(t) - F_{n-1}(t))), \ \alpha, \beta > 0 . (1)$$

$\alpha(F_{n-1} - F_n)$ - инновационная составляющая,

$\beta(1 - F_n)(F_{n-1} - F_n)$ - имитационная составляющая.

$$0 < F_n(0) \le F_{n+1}(0) < 1, n < N - 1, \ F_n(0) = 1, n \ge N \quad (1')$$

$$F_0(t) = 0 \qquad t \ge 0. \ (1'')$$

2. ______________________________

$$B(t) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}(1 - F_k(t))\right),$$

$$F_n^*(t, A) = \left(1 + e^{-(n - c(t+\tau))}\right)^{-1},$$

$$c = \frac{\beta}{\ln\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\right)}, \quad \tau = \frac{\ln A}{\beta}.$$

Теорема (Полтерович - Хенкин).

$F_n,\ 1 \le n < \infty$ - решение задачи (1),(1'),(1'').

$A = B(0)$

$$\underline{\left|F_n(t) - F_n^*(t, A)\right| \le \lambda e^{-\gamma t},\ 1 \le n < \infty,\ \ t \ge T_0,}$$

λ, T_0, γ - постоянные, зависящие от $\alpha, \beta, B(0),\ N$.

3. ______________________________

$$\frac{dF_n(t)}{dt} = -\left(\alpha + \beta\left(F_{n+1}(t) - F_n(t)\right)\left(F_n(t) - F_{n-1}(t)\right)\right) .(2)$$

$\beta\left(F_{n+1} - F_n\right)\left(F_{n-1} - F_n\right)$ - имитационная составляющая.

4. ______________________________

$\alpha = 0.$ Замена переменных

$$\tau = \beta t,\ c_n(\tau) = F_{N+1-n}(\tau) - F_{N-n}(\tau).$$

Конечная цепочка Ленгмюра:

$$\frac{dc_1}{dt} = c_1 c_2$$

$$\frac{dc_n}{dt} = c_n(c_{n+1} - c_{n-1}), \quad n = 2, \ldots, N-1,$$

$$\frac{dc_N}{dt} = -c_N c_{N-1},$$

$$c_n(0) = \gamma_n, \quad n = 1, \ldots, N.$$

$$N = 2k : (y_1, 0, y_2, 0, \ldots, y_k, 0);$$

$$N = 2k+1 : (y_1, 0, y_2, 0, \ldots, y_k, 0, y_{k+1}).$$

Необходимое условие устойчивости:

$$y_1 \geq y_2 \geq \ldots \geq y_k (\geq y_{k+1}) \geq 0.$$

$$\cfrac{1}{z - \cfrac{c_1(t)}{z - \cfrac{c_2(t)}{z - \ddots - \cfrac{c_N(t)}{z}}}} = \frac{\sum\limits_{n=0}^{N} \dfrac{m_n e^{\lambda_n^2 t}}{z - \lambda_n}}{\sum\limits_{n=0}^{N} m_n e^{\lambda_n^2 t}} \qquad (3)$$

5. о-

$$\mu(dx) = \sum_{k=0}^{N} m_k \delta(x - \lambda_k),$$

$$\sum_{k=0}^{N} m_k = 1,\ m_0 \ge 0, \ldots, m_N \ge 0.$$

$$\hat{\mu}(z) = \int_0^{\infty} \frac{\mu(dx)}{z - x} = \sum_{k=0}^{N} \frac{m_k}{z - \lambda_k}.$$

$$\hat{\mu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{z^{n+1}},$$

$$s_n = \int_0^{\infty} x^n \mu(dx)$$ $\mu(dx)$.

$$\{Q_n(z)\}_{n=0}^{\infty},\ \deg Q_n(z) = n,\ \int_0^{\infty} Q_n(x) Q_m(x) \mu(dx) = \delta_{nm}.$$

$$Q_n(z) = \frac{1}{\sqrt{H_{n+1} H_n}} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{n-1} \\ . & . & . & . \\ s_{n-1} & s_n & \ldots & s_{2n-1} \\ 1 & z & \ldots & z^n \end{vmatrix},$$ где

$$H_n = \begin{vmatrix} s_0 & \dots & s_{n-1} \\ . & . & . \\ s_{n-1} & \dots & s_{2n-2} \end{vmatrix}$$ **определители Ганкеля.**

$$P_n(z) = \int_0^\infty \frac{Q_n(z) - Q_n(x)}{z - x} \mu(dx), \ \deg P_n(z) = n - 1.$$

$$zQ_n(z) = h_n Q_{n+1}(z) + v_n Q_n(z) + h_{n-1} Q_{n-1}(z),$$

$$Q_{-1}(z) = 0, Q_0(z) = 1,$$

$$zP_n(z) = h_n P_{n+1}(z) + v_n P_n(z) + h_{n-1} P_{n-1}(z),$$

$$P_{-1}(z) = 1, P_0(z) = 0.$$

$$v_n = \int_0^\infty x Q_n^2(x) \mu(dx),$$

$$h_n = \frac{\sqrt{H_{n-1} H_{n+1}}}{H_n}. \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} v_0 & h_0 & & O \\ h_0 & v_1 & h_1 & \\ & h_1 & v_2 & \ddots \\ O & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\pi_n(z) = \frac{P_n(z)}{Q_n(z)},\ Q_n(z)\hat{\mu}(z) - P_n(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right).$$

$$\pi_n(z) = \cfrac{1}{z - v_0 - \cfrac{h_0^2}{z - v_1 - \cfrac{h_1^2}{z - v_2 - \cfrac{h_2^2}{z \ddots - \cfrac{h_n^2}{z}}}}}$$

В рассматриваемом случае:

$$\hat{\mu}(z) = \pi_{N+1}(z) = \frac{P_{N+1}(z)}{Q_{N+1}(z)},$$

$\lambda_0,\ldots,\lambda_N$ $Q_{N+1}(z)$,

$$m_k = \operatorname*{res}_{z=\lambda_k} \frac{P_{N+1}(z)}{Q_{N+1}(z)},$$

$$v_k = 0\ (k = 0,1,\ldots),$$

$$h_k = \sqrt{c_k}\ (k = 0,\ldots,N),\ h_k = 0\,(k > N).$$

$$\{m_k, \lambda_k\},\quad \{s_k\},\quad \{c_k\}.$$

6. ______________________________

$\lambda_0, \ldots, \lambda_N$ из формулы (3) для точного решения конеч-

t

$$L(t) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{c_1(t)} & & & \\ \sqrt{c_1(t)} & 0 & \sqrt{c_2(t)} & & O \\ & \sqrt{c_2(t)} & 0 & & \\ O & & \ddots & 0 & \sqrt{c_N(t)} \\ & & & \sqrt{c_N(t)} & 0 \end{pmatrix}$$

$-\lambda_1, -\lambda_2, \ldots, -\lambda_{\frac{N}{2}}, 0, \lambda_{\frac{N}{2}}, \ldots, \lambda_2, \lambda_1,$ N четное,

$-\lambda_1, -\lambda_2, \ldots, -\lambda_{\frac{N+1}{2}}, \lambda_{\frac{N+1}{2}}, \ldots, \lambda_2, \lambda_1,$ N нечетное.

$$\lambda_1^2 > \lambda_2^2 > \ldots > \lambda_{\frac{N}{2}}^2 \left(\lambda_{\frac{N+1}{2}}^2 \right) > 0.$$

Лемма.

$$\frac{H_{2k+1}(t)}{H_{2k}(t)} = O\left(e^{\left(\lambda_{k+1}^2 - \lambda_{1k}^2\right)t} \right),$$

$$\frac{H_{2k+2}(t)}{H_{2k+1}(t)} = \lambda_{k+1}^2 \frac{H_{2k+1}(t)}{H_{2k}(t)} + o\left(\frac{H_{2k+1}(t)}{H_{2k}(t)} \right).$$

Теорема.

$t \to \infty$

$$\lim_{t\to\infty} c_{2k-1}(t) = \lambda_k^2, \quad c_{2k}(t) = O\left(e^{\left(\lambda_{k+1}^2 - \lambda_k^2\right)t}\right), \; k = 1,\ldots,\left[\frac{N+1}{2}\right],$$

$$\lim_{t\to\infty} c_N(t) = \lambda_{\frac{N+1}{2}}^2$$ N

$$\lim_{t\to\infty} c_{N-1}(t) = \lambda_{\frac{N}{2}}^2, \quad c_N(t) = O\left(e^{\left(-\lambda_{\frac{N}{2}}^2\right)t}\right)$$ N четном.